Zum 13. Übblatt HM III WS 2011/12

A1 Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix} = \mathrm{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{t+2it} \end{pmatrix}$

liegt vor das Problem: $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{q}(t)$, $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit der Lösung (Satz 12/9.a)

(*) $$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\vec{q}(\tau)\,d\tau$$

Läßt man $\vec{x}(0)$ offen ($\vec{x}(0) = \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ beliebig konstant), so steht hier die allgemeine Lösung.

1) Zu e^{tA}

EW von A: $0 = \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(\lambda - (1+2i))(\lambda - (1-2i))$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+2i$, $\lambda_3 = 1-2i$.

Zugehörige EV:

zu $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \in \mathcal{L}_{\vec{0}}$

zu $\lambda = 1+2i$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$: $\vec{x}_c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t}$

$\Rightarrow \vec{x}_2(t) = \mathrm{Re}\,\vec{x}_c(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{\vec{0}}$

$\vec{x}_3(t) = \mathrm{Im}\,\vec{x}_c(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{\vec{0}}$

Damit ist $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -3e^t & e^t\cos 2t & e^t \sin 2t \\ 2e^t & e^t \sin 2t & -e^t \cos 2t \end{pmatrix}$

<u>eine Fundamentalmatrix</u> und

$$e^{tA} = X(t)\,X(0)^{-1} = X(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin 2t & \cos 2t & -\sin 2t \\ 1 + \frac{3}{2}\sin 2t - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

2) Auswertung von $\overline{(*)}$:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^s \cos 2s \end{pmatrix} ds$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix} + e^{tA}\int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2s \cos 2s \\ \cos^2 2s \end{pmatrix} ds$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix} + e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}\sin^2 2t \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\sin 4t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - \left(1 + \frac{t}{2}\right)\sin 2t \\ \left(1 + \frac{t}{2}\right)\cos 2t + \frac{5}{4}\sin 2t \end{pmatrix}$$

A2 Setze $u(x,t) = \varphi(x)\chi(t)$ in die DGl ein:

$$\varphi''(x)\chi(t) = \varphi(x)\dot{\chi}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)} \text{ (für alle } x, t \in \mathbb{R}\text{, also)} = \lambda \text{ (konst)}$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$$

und $\dot{\chi}(t) = \lambda\chi(t) \Rightarrow \chi(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ Lösungen der DGl sind (die DGl ist linear) beliebige LK von Ausdrücken der Form

$$u(x,t) = e^{\pm\sqrt{\lambda}x} e^{\lambda t} \quad (\lambda \text{ konst, beliebig} \in \mathbb{R})$$

1. $\lambda \geq 0$: $u(x,t)$ ist für $t \to +\infty$ unbeschränkt. Die Randbedingungen $u(0,t) = u(l,t) = 0$ lassen sich nicht erfüllen.

2. $\lambda < 0$: setze $\lambda = -\xi^2$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{\pm i\xi x} e^{-\xi^2 t}, \quad \xi \neq 0, \xi \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$\Rightarrow$ beliebige LK von $e^{-\xi^2 t}\cos\xi x$ und $e^{-\xi^2 t}\sin\xi x$ sind Lösungen, also LK von Ausdrücken der Form

$$v(x,t) = e^{-\xi^2 t}(A\cos\xi x + B\sin\xi x), \quad A, B \text{ konst} \in \mathbb{R}$$

Erfüllung der Randbedingungen (RB) $v(0,t) = v(l,t) = 0$:

$$v(0,t) = 0 = A \Rightarrow v(x,t) = Be^{-\xi^2 t}\sin\xi x$$

$0 \overset{!}{=} v(\ell,t) \iff \sin \xi \ell = 0$

$$\Rightarrow \xi = \xi_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1, 2 \ldots$$

1. Ergebnis

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$) hat man in

$$(**) \quad v_n(x,t) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} t}$$

mit beliebigen B_n eine Lösung der DGl, die die RB erfüllt.

Mit (**) und auch durch LK von Ausdrücken (**) lässt sich die Anfangsbedingung (AB) $v(x,0) = f(x)$ i.a. nicht erfüllen.

$\downarrow$ Aber durch Ausdrücke der Form:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} t}$$

Die B_n berechnen sich aus

$$(u(x,0) =) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \qquad \text{zu}$$

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(y) \sin \frac{n\pi}{\ell} y \, dy \qquad n = 1, 2 \ldots .$$

Die Lösung des vorgelegten Problems wird

$$u(x,t) = \int_0^{\ell} \left[\frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} y \right] f(y) \, dy$$

Bemerkung: Ab $\downarrow$ ist das hier rein formal (Konvergenz? Vertauschung von lim und $\int$?). Die Begründung geschieht im Rahmen der Theorie der Fourierreihen.

A3 Die DGl wird von $u = u(x,y)$ erfüllt.

Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \neq (0,0)$:

$$y\, D_1 u(x,y) - x\, D_2 u(x,y) = 0$$

Mit $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ wird das zu

$(*)$ $\quad r\sin t\,(D_1 u)(r\cos t, r\sin t) - r\cos t\,(D_2 u)(r\cos t, r\sin t) = 0.$

Für $v(r,t) := u(r\cos t, r\sin t)$ gilt (Kettenregel):

$$(D_2 v)(r,t) = -r\sin t\,(D_1 u)(r\cos t, \sin t) + r\cos t\,(D_2 u)(r\cos t, r\sin t)$$

Wegen $(*)$ also: $D_2 v(r,t) = 0$

$\Rightarrow \quad v(r,t) = f(r)$ mit $f \in C^1$, beliebig

$\Rightarrow \quad \underline{u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) =: F(x^2+y^2)}$, $F \in C^1$, beliebig.

Die Probe zeigt, dass derartige Funktionen u der vorgelegten DGl genügen.

A4 $A = (a_{kj})$ sei reguläre (n,n)-Matrix

$A^{-1} = (\alpha_{kj})$.

$\Rightarrow \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv

$\vec{x} \to \vec{y} := A\vec{x}$

$v = v(\vec{y}) \quad \to \quad u(\vec{x}) := v(A\vec{x})$

$u = u(\vec{x}) \quad \to \quad v(\vec{y}) := u(A^{-1}\vec{y})$

Es gilt $\quad (\nabla_{\vec{x}} u)(\vec{x}) = ((A^T \nabla_{\vec{y}}) v)(A\vec{x})$ $\quad$ Kettenregel, Matrizenrechnung, ∇-Rechnung

$$\Rightarrow \underline{(\Delta_{\vec{x}} u)(\vec{x})} = (\nabla_{\vec{x}}^T \nabla_{\vec{x}} u)(\vec{x}) = \underline{((\nabla_{\vec{y}}^T A A^T \nabla_{\vec{y}}) v)(A\vec{x})}$$

$(*)$

1) Es gelte $A = \lambda B$ mit B orthogonaler (n,n) Matrix
$\lambda > 0$

$$\Rightarrow AA^T = \lambda^2 E \quad \text{, also mit } (*)$$

$$\Delta u(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \Delta v(\vec{y}) = 0.$$

2) Es gelte für jede C^2-Funktion u und mit $v(\vec{y}) = u(A^{-1}\vec{y})$

$$\Delta u(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \Delta v(\vec{y}) = 0$$

Was folgt daraus für A?

Für $u(\vec{x}) := x_j x_k$ ($j, k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig, fest)

gilt $\Delta u(\vec{x}) = 0$.
Nach Vor. gilt $\Delta v(\vec{y}) = 0$ für das zugehörige v.
Man rechnet (und man rechne!) nach:

$$\Delta v(\vec{y}) = 2 \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm} \alpha_{km} = 0 \quad \text{für } j \neq k$$

(1) d.h.: Bezeichnet $\vec{z}_j$ den j-ten Zeilenvektor von A^{-1} ($j = 1, \dots, n$), so gilt $\vec{z}_j \cdot \vec{z}_k = 0 \quad j \neq k$.

Für $u(\vec{x}) = x_j^2 - x_k^2$ ($j \neq k$; j, k beliebig, fest)

gilt $\Delta u = 0$. $\Delta v(\vec{y}) = 0$ für das zugehörige v ergibt $\|\vec{z}_j\|^2 = \|\vec{z}_k\|^2 \quad j, k = 1, \dots, n$.

(2) $$=: \frac{1}{\lambda^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0)$$

Definiere B durch $B := \frac{1}{\lambda} A \Rightarrow B^{-1} = \lambda A^{-1}$!

gemäß (1), (2) bilden die Zeilen von B^{-1} ein ON-System. Somit (HM II) ist B^{-1}, und damit auch B eine orthogonale Matrix.

Das etwas anders:

gemäß oben gilt: $(A^{-1})(A^{-1})^T = \frac{1}{\lambda^2} E = (A^T A)^{-1}$

also: $A^T A = \lambda^2 E$

$$\Rightarrow B^T B = \frac{1}{\lambda^2} A^T A = E$$