Aufgabe 1

a) $\partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0, \; x>0, \; t>0$

$u(x,0) = 1, \quad u(0,t) = \dfrac{1+t^2}{1+2t^2} \qquad (x>0 \mid t>0)$

Jede Lösung der DGL hat die Form $u(x,t) = \varphi(x-ct)$.
Die Lösungen sind auf den Geraden $x = ct + \alpha$ (α konst) (*) konstant.

1. Es sei (ξ,τ) ein beliebiger Punkt der (x,t)-Ebene mit $\xi > c\tau$.
Die Gerade (*) durch diesen Punkt ist $x(t) = ct + \xi - c\tau$.
Da $x(0) = \xi - c\tau > 0$ gilt, ist die Lösung auf dieser Geraden $= 1$.

$\underset{=}{1} \quad \underline{u(x,t) = 1, \; x > ct}.$

2. Es sei (ξ,τ) ein beliebiger Punkt der (x,t)-Ebene mit $\xi \le c\tau$. Die Gerade (*) durch diesen Punkt ist $x(t) = ct + \xi - c\tau$. Es gilt für $t = \tau - \frac{\xi}{c} \ge 0$ $x = 0$.

Damit gilt auf dieser Geraden, also auch in (ξ,τ):

$$u(\xi,\tau) = \frac{1+t^2}{1+2t^2}\Big|_{t=\tau-\frac{\xi}{c}} = \frac{c^2+(c\tau-\xi)^2}{c^2+2(c\tau-\xi)^2}$$

$$\underline{2.} \quad \underline{u(x,t) = \frac{c^2+(ct-x)^2}{c^2+2(ct-x)^2}, \; 0<x\le ct}$$

---

b) Hier sind alle Lösungen von der Form $u(x,t) = \psi(x+t)$, $0<x<1, t>0$. Die Lösungen sind auf Geraden $x + t = \alpha$ (*) (α konst) konstant.

$u(x,0) = 2$ für $0<x<1$ gibt $\varphi(x) = 2$ für $0<x<1$.
Also

$$u(x,t) = \varphi(x+t) = 2 \quad \text{für } 0<x+t<1,\ 0<x<1$$
$$\text{oder } 0<t<1-x,\ 0<x<1$$

$\underline{1.}$ $\underline{u(x,t) = 2 \qquad 0<t<1-x,\ 0<x<1}$

Ist (ξ,τ) ein Punkt der (x,t)-Ebene mit $\tau \geq -\xi+1,\ 0\leq\xi\leq 1$, so gilt für u auf der Geraden $x(t) = -t+\xi+\tau$ $\underline{(*)}$
$u(1,\xi+\tau-1) = \dfrac{2}{1+(\xi+\tau-1)^2}$

$\underline{2.}$ $\underline{u(x,t) = \dfrac{2}{1+(x+t-1)^2},\ t\geq -x+1,\ 0\leq x\leq 1}$

__Aufgabe 2__

Das vorliegende Problem hat nach Vorlesung die Lösung

$\underline{(*)}$ $$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x+ct)+g(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds .$$

a) $g(x) = h(x) = 0$ für $-\ell \leq x-x_0 \leq \ell$

$\underline{(*)} \Rightarrow u(x_0,t) = 0$ falls $x_0-\ell \leq x_0 \pm ct \leq x_0+\ell$

$\begin{matrix} t>0 \\ c>0 \end{matrix} \Rightarrow$ $\underline{u(x_0,t) = 0 \quad \text{für} \quad t \leq \frac{\ell}{c} =: T}$

b) Aus $\underline{(*)}$ für $x=3$ mit $t>0, c>0$ folgt

$\underline{u(3,t) = 0}$ falls $3-ct>1$
$\Leftrightarrow$ $\underline{t \leq \frac{2}{c} =: T}$

c) Aus $g(x) = h(x) = 0$ für $|x| > l$
und aus
(*) $u(x_0,t) = \frac{1}{2}(g(x_0+ct)+g(x_0-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} h(s)\,ds$

folgt wegen:
$g(x_0+ct) = 0$ für $x_0+ct < -l$ oder $x_0+ct > l$
$g(x_0-ct) = 0$ für $x_0-ct < -l$ oder $x_0-ct > l$

für $\underline{t > T := \max\left(\frac{x_0+l}{c}, \frac{l-x_0}{c}\right)}$ $\left\{ \begin{array}{l} x_0-ct<-l \\ \text{und} \\ x_0+ct > l \end{array}\right.$

$\underline{g(x_0+ct) = g(x_0-ct) = 0}$ und (mit (*))

$$\underline{u(x_0,t)} = \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} h(s)\,ds \underset{\underline{t>T}}{=} \frac{1}{2c}\int_{-l}^{l} h(s)\,ds =: \underline{\mathcal{U}.}$$

Aufgabe 3

Nach Vorlesung gilt $u(x,t) = \psi(x+ct)$ $\forall x, t \geq 0$ also auch $\forall x$ und $\forall t \geq s > 0$. ψ beliebig.

Es soll gelten $u(x,s) = f(x,s) = \psi(x+cs)$
Setze $\lambda = x+cs \Rightarrow x = \lambda - cs \Rightarrow \psi(\lambda) = f(\lambda-cs, s)$

$$\Rightarrow (u(x,t) =)\ \underline{w(x,t;s)} = (\psi(x+ct) =)\ \underline{f(x+c(t-s), s)}$$

Für $v(x,t) := \int_{s=0}^{t} f(x+c(t-s),s)\,ds$ rechnet man

nach: $\underline{v(x,0) = 0}$

und $D_2 v(x,t) = f(x,t) + \int_{s=0}^{t} c\,D_1 f(x+c(t-s),s)\,ds$

$$c\,\partial_1 v(x,t) = \int_{s=0}^{t} c\,\partial_1 f(x+c(t-s),s)\,ds$$

Also: $\underline{\partial_2 v(x,t) - c\,\partial_1 v(x,t) = f(x,t) \quad , x\in\mathbb{R}, t>0}$

$\underline{v(x,0)=0}$

(Der Teil von Satz 4 / 10. Kapitel, der in der Vorlesung offen geblieben ist).

<u>Aufgabe 4</u>

① $(\partial_2 - c\,\partial_1)\,v(x,t) = f(x,t)$

Nach Aufgabe 3 oben gilt: $v(x,t) = \int_0^t f(x-c(s-t),s)\,ds$. $\underline{(*)}$

Mit dieser Funktion v ist

② $(\partial_2 + c\,\partial_1)\,u(x,t) = v(x,t)$ zu lösen.

Wie in ① mit v anstelle von f und $-c$ anstelle von c:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x+c(\sigma-t),\sigma)\,d\sigma \qquad \underline{(**)}$$

Mit $\underline{(*)}$ hat man $v(x+c(\sigma-t),\sigma) = \int_0^\sigma f(x+c(\sigma-t)-c(s-\sigma),s)\,ds$

$$= \int_0^\sigma f(x+2c\sigma-c(s+t),s)\,ds$$

Setze in (**) ein:

$$u(x,t) = \int_{\sigma=0}^{t} \left(\int_{s=0}^{\sigma} f(x+2c\sigma - c(s+t), s)\,ds \right) d\sigma$$

$$= \int_{s=0}^{t} \left(\int_{\sigma=s}^{t} f(x+2c\sigma - c(s+t), s)\,d\sigma \right) ds$$

Substituiere $\sigma \to \tau := x + 2c\sigma - c(s+t)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{s=0}^{t} \left(\int_{\tau=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau, s)\,d\tau \right) ds$$

Das ist der Teil aus [8]/Satz 7/S. 35, der aus der Vorlesung noch offen war.