Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt, WS 2012/2013

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 **a)** Die Trennung der Variablen liefert

$$\int_0^x y'(s)y^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \frac{s}{3\sqrt{1+s^2}}\,\mathrm{d}s,$$

und die Substitution $t = y(s)$, $\mathrm{d}t = y'(s)\,\mathrm{d}s$, führt auf

$$\int_3^{y(x)} t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{s}{3\sqrt{1+s^2}}\,\mathrm{d}s.$$

Wir erhalten somit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{3}y(x)^3 - 9 = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{3} \quad\Longleftrightarrow\quad y(x) = \left(\sqrt{1+x^2}+26\right)^{1/3}.$$

b) Nach Separation erhalten wir für $x \neq 0$

$$\int \frac{2y-6}{y^2-6y+5}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longleftrightarrow\quad \log|y^2-6y+5| = -\log|x| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Nun wenden wir die Exponentialfunktion an und lösen den Betrag auf. Dies führt auf

$$y^2 - 6y + 5 = c_2\frac{1}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad (y-3)^2 = c_2\frac{1}{x} + 4, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist daher gegeben durch

$$y(x) = 3 \pm \sqrt{c_2\frac{1}{x}+4}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir durch Einsetzen des Anfangswertes. Mit $y(1) = 2$ erhalten wir $c_2 = -3$ sowie ein negatives Vorzeichen vor der Wurzel (da sonst die Anfangsbedingung verletzt wäre). Die Lösung lautet also

$$y(x) = 3 - \sqrt{4 - \frac{3}{x}} \quad \text{für } x > \frac{3}{4}.$$

c) Wir formen zunächst die Differentialgleichung um:

$$y'(x)e^{y(x)}e^{e^{y(x)}} = e^x.$$

Die linke Seite ist gerade die Ableitung von $e^{e^{y(x)}}$. Integration liefert daher

$$e^{e^{y(x)}} = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nach Umformen erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = \log\left(\log\left(e^x + c\right)\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für $x = 1$ ist $\log\left(\log\left(e^1 + c\right)\right) = 0$ genau dann wenn $c = 0$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblemes

$$y(x) = \log\left(\log\left(e^x\right)\right) = \log(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Aufgabe 2 Bei allen drei Aufgabenteilen handelt es sich um inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen erhalten wir daher als Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

a) Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' = \frac{1}{1-x}y$ ist gegeben durch

$$y_{hom}(x) = c\exp(-\log(x-1)) = c\frac{1}{x-1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung für die inhomogene Differentialgleichung bekommen wir mit Variation der Konstanten: Setzen wir den Ansatz $y(x) = c(x)\frac{1}{x-1}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir $c'(x) = (x-1)^2$, also $c(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3$. Eine spezielle Lösung ist damit gegeben durch $y_p = \frac{1}{3}(x-1)^2$. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = c\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}(x-1)^2, \quad \text{für } x \neq 1, c \in \mathbb{R}.$$

b) Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' = -\frac{3}{x}y$ lautet

$$y_{hom}(x) = c\exp(-3\log(x)) = c\frac{1}{x^3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz für die Variation der Konstanten lautet also $y(x) = c(x)\frac{1}{x^3}$. Wir setzen den Ansatz in die Differentialgleichung ein und erhalten $c'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$. Also ist $c(x) = x - \arctan(x)$ und damit $y_p(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)$ eine spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = c\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x), \quad \text{für } x \neq 0, c \in \mathbb{R}.$$

c) Die zugehörige homogenen Differentialgleichung lautet $y' = \frac{1-2x^2}{x}y$. Die allgemeine Lösung davon ist

$$y_{hom}(x) = c\exp\Big(\int \frac{1-2x^2}{x}\,\mathrm{d}x\Big) = c\exp\Big(\int \frac{1}{x} - 2x\,\mathrm{d}x\Big) = c\exp\big(\log(x) - x^2\big) = cxe^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mittels Variation der Konstanten machen wir den Ansatz $y(x) = c(x)xe^{-x^2}$, welcher uns nach Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung auf die Gleichung $c'(x) = \frac{1}{x}\log(x)$ führt, also $c(x) = \frac{1}{2}\big(\log(x)\big)^2$. Damit erhalten wir die spezielle Lösung $y_p(x) = \frac{1}{2}\big(\log(x)\big)^2 xe^{-x^2}$ und als allgemeine Lösung schließlich

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = \big(\tfrac{1}{2}\big(\log(x)\big)^2 + c\big)xe^{-x^2}, \quad \text{für } x > 0, c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 **a)** Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 3$. Wir setzen daher $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-2}$. Dann erhalten wir für z die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = 2z(x) - 2.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörige homogenen Differentialgleichung $z'(x) = 2z(x)$ ist gegeben durch $z(x) = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten c lässt sich nun eine spezielle Lösung ermitteln. Wir machen den Ansatz $z(x) = c(x)e^{2x}$ und setzen ihn in die inhomogene Differentialgleichung ein. Damit erhalten wir $c'(x) = -2e^{-2x}$, also $c(x) = e^{-2x}$ und somit $z_p(x) = 1$. Also erhalten wir als allgmeine Lösung

$$z(x) = 1 + ce^{2x} \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ce^{2x}}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ impliziert $c = 3$. Somit ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2x}}}$ die gesuchte Lösung.

b) Wir teilen die Gleichung durch $xy(x)^2$ und erhalten

$$y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{3x^3+3x}y(x)^{-2},$$

also eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = -2$. Setzen wir $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^3$, so finden wir die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = -\frac{3}{x}z(x) + \frac{1}{x^3+x}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nach Aufgabe 2 b) gegeben durch $z(x) = c\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)$. Nach Resubstitution erhalten wir

$$y(x) = \Big(c\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)\Big)^{1/3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ liefert $c = \frac{\pi}{4}$. Damit ist schließlich

$$y(x) = \Big(\frac{\pi}{4}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)\Big)^{1/3}, \quad \text{für } x > 0,$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 4 Zunächst bestimmen wir eine spezielle Lösung der Gleichung mit dem gegebenen Ansatz $y_0(x) = e^{ax}$. Einsetzen liefert

$$(a-1)e^{ax} = e^{(2a-1)x} - e^x,$$

und für $a = 1$ gilt Gleichheit. Somit ist $y_0(x) = e^x$ eine Lösung der Gleichung.

Die weiteren Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung bekommen wir nun mit dem Ansatz $u := y - y_0 = y - e^x$. Dieser liefert für die Funktion u die Gleichung

$$u'(x) = (1 + 2y_0(x)e^{-x})u(x) + e^{-x}u(x)^2 \qquad \text{also} \qquad u'(x) = 3u(x) + e^{-x}u(x)^2.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir $z(x) := u(x)^{1-\alpha} = u(x)^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$z'(x) = -3z(x) - e^{-x}.$$

Die homogene Gleichung $z'(x) = -3z(x)$ hat die allgemeine Lösung $z_{hom}(x) = ce^{-3x}$, $c \in \mathbb{R}$, und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ als spezielle Lösung der inhomogen Gleichung. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z(x) = ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Nun ermitteln wir die Nullstellen von z. Aus $z(\xi) = 0$ folgt $e^{2\xi} = 2c$. Für $c \leq 0$ hat z also keine Nullstelle, für $c > 0$ ist $\xi = \frac{\log(2c)}{2}$ die einzige Nullstelle von z.

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir also durch

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}}$$

eine Lösung von $u' = 3u + e^{-x}u^2$, wobei $x \in \mathbb{R}$ falls $c \leq 0$ und $x \in (-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ oder $x \in (\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ falls $c > 0$ gilt. Zusammen mit $u \equiv 0$ sind dies alle Lösungen von $u' = 3u + e^{-x}u^2$.

Für die ursprüngliche Gleichung haben wir also die Lösungen

$$y_0(x) = e^x \qquad \text{und} \qquad y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^{-3x} - e^{-x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

auf den entsprechenden Intervallen $\mathbb{R}$ oder $(-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ bzw. $(\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ je nach Wahl von c.

Aufgabe 5 Im Folgenden sei stets $k := \frac{1}{2} c_W \rho A$.

a) In horizontaler Richtung wirkt auf den Körper nur die Luftwiderstandskraft, die damit der resultierenden Gesamtkraft entspricht. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_W \\ \iff \quad ma &= -kv^2 \\ \iff \quad v' &= -\frac{k}{m} v^2. \end{aligned}$$

Mittels Trennung der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{1}{v^2} \,\mathrm{d}v = -\frac{k}{m} t + c \quad \text{also} \quad v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m} t - c}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und mit $v(0) = v_0$ schließlich

$$v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0}}.$$

Insbesondere ist $v \equiv 0$, falls $v_0 = 0$.

b) Im Gegensatz zur Bewegung in horizontaler Richtung wirkt hier neben F_W auch die Gewichtskraft F_g. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_W + F_g \\ \iff \quad ma &= -kv^2 + mg \\ \iff \quad v' &= -\frac{k}{m} v^2 + g. \end{aligned}$$

Dies ist eine Riccatische Differentialgleichung. Um diese zu lösen, benötigen wir zunächst eine spezielle Lösung dieser Gleichung. Durch Umformen der Gleichung für v finden wir

$$v' = -\frac{k}{m}(v^2 - \frac{m}{k} g).$$

Nehmen wir versuchsweise an, dass v konstant ist, erkennen wir, dass $v_\infty := \sqrt{\frac{mg}{k}}$ eine (konstante) Lösung der Gleichung ist. Anschaulich ist dies die Geschwindigkeit, bei der sich Luftreibung und Erdanziehungskraft gegenseitig kompensieren und der Körper mit konstanter Geschwindigkeit fällt.

Der Ansatz $u := v - v_\infty$ führt uns auf die Bernoullische Differentialgleichung

$$u' = -2\frac{k}{m} v_\infty u - \frac{k}{m} u^2.$$

Durch eine erneute Substitution $z := u^{-1}$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung

$$z' = 2\frac{k}{m} v_\infty z + \frac{k}{m}.$$

Für eine *lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*, d.h. $y' = ay + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ kann man leicht nachrechnen, dass $y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $c \in \mathbb{R}$, die Lösung dieser Gleichung ist.

Daher ist $z(t) = z_0 \exp(2\frac{k}{m} v_\infty t) - \frac{1}{2v_\infty}$, $z_0 \in \mathbb{R}$, die Lösung der Gleichung für z. Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$v(t) = v_\infty - \frac{2v_\infty}{c_0 \exp(2\frac{k}{m} v_\infty t) + 1}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ führt schließlich auf $c_0 = \frac{v_\infty + v_0}{v_\infty - v_0}$ und somit auf die Lösung

$$v(t) = v_\infty - \frac{2v_\infty (v_\infty - v_0)}{(v_\infty + v_0) \exp(2\frac{k}{m} v_\infty t) + v_\infty - v_0}.$$