**Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt, WS 2012/2013**

**Höhere Mathematik III**
**für die Fachrichtung Physik**

**Aufgabe 6** **a)** Hier ist $P(x,y) = y + x$ und $Q(x,y) = -y + x$. Es sind $P$ und $Q$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$\partial_y P(x,y) = 1 = \partial_x Q(x,y),$$

also ist die Gleichung exakt. Als nächstes suchen wir eine Stammfunktion zu $(P,Q)$, d.h. eine Funktion $F$ mit

$$\partial_x F(x,y) = P(x,y) = y + x \quad \text{und} \quad \partial_y F(x,y) = Q(x,y) = -y + x.$$

Integrieren wir die erste Gleichung nach $x$ so erhalten wir

$$F(x,y) = xy + \tfrac{1}{2}x^2 + c(y),$$

wobei $c(y)$ eine von $y$ abhängige Integrationskonstante ist. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\partial_y F(x,y) = x + c'(y) \stackrel{!}{=} -y + x \quad \Longleftrightarrow \quad c'(y) = -y.$$

Wir können $c(y) = -\frac{1}{2}y^2$ wählen und erhalten

$$F(x,y) = \tfrac{1}{2}(x^2 + 2xy - y^2)$$

als mögliche Stammfunktion (beachte: es ist nur *eine* Stammfunktion gesucht). Die Lösungen sind daher implizit gegeben durch

$$x^2 + 2xy - y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**b)** Hier ist $P(x,y) = 2xe^y - 1$ und $Q(x,y) = x^2e^y + 1$. Diese sind beide stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und partielles Ableiten führt auf

$$\partial_y P(x,y) = 2xe^y = \partial_x Q(x,y).$$

Die Gleichung ist also exakt. Analog zu a) können wir nun eine Stammfunktion bestimmen und erhalten als Ergebnis

$$F(x,y) = x^2e^y - x + y.$$

Die Lösungen sind daher in impliziter Form gegeben durch

$$x^2e^y - x + y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 7** Setzen wir $P(x,y) := \cos y + 2xy$ und $Q(x,y) := x^2 - y - x\sin y$, so sind $P$ und $Q$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$\partial_y P(x,y) = -\sin y + 2x = \partial_x Q(x,y).$$

D.h. die Differentialgleichung ist exakt und wir können die Lösung mit Hilfe einer Stammfunktion $F$ bestimmen. Hierbei fordern wir $\partial_x F = P$ und $\partial_y F = Q$. Integration der ersten Gleichung führt auf

$$F(x,y) = x\cos y + x^2y + c(y).$$

Ableiten nach $y$ und Anwenden der zweiten Bedingung ergibt

$$\partial_y F(x,y) = -x\sin y + x^2 + c'(y) \stackrel{!}{=} x^2 - y - x\sin y \quad \Longleftrightarrow \quad c'(y) = -y$$

und es folgt $c(y) = -\frac{1}{2}y^2$. Damit ergibt sich die allgemeine implizite Darstellung der Lösung zu

$$F(x,y) = x^2y + x\cos y - \tfrac{1}{2}y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Um die Konstante $c$ zu bestimmen, setzen wir die Anfangsbedingung ein: $F(0,\sqrt{2}) = -1 = c$. D.h. die Lösung ist implizit gegeben durch

$$x^2y + x\cos y - \tfrac{1}{2}y^2 = -1.$$

**Aufgabe 8** **a)** Die Gleichung ist von der Form $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ mit $P(x,y):=\frac{1}{x^2}+2y^2$ und $Q(x,y):=yx$. Gesucht ist ein nur von $x$ abhängiger integrierender Faktor $\mu(x,y)=\mu(x)$. Partielles Ableiten führt auf

$$\partial_y\big(\mu(x)P(x,y)\big)=4y\mu(x)\quad \text{und}\quad \partial_x\big(\mu(x)Q(x,y)\big)=yx\mu'(x)+y\mu(x).$$

Gleichsetzen liefert $\mu'(x)=\frac{3}{x}\mu(x)$. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist $\mu(x)=cx^3$, $c\in\mathbb{R}$. Da wir aber nur *einen* Multiplikator brauchen, können wir $c\neq 0$ beliebig wählen, z.B. $c=1$. Dies führt auf die exakte Differentialgleichung

$$(x+2x^3y^2)\,\mathrm{d}x+yx^4\,\mathrm{d}y=0.$$

Wir bestimmen nun eine Funktion $F$ mit $\partial_x F(x,y)=x+2x^3y^2$ und $\partial_y F(x,y)=yx^4$. Integrieren wir die erste Gleichung bezüglich $x$, so erhalten wir

$$F(x,y)=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^4y^2+c(y).$$

Anschließendes Differenzieren bezüglich $y$ ergibt

$$\partial_y F(x,y)=x^4y+c'(y)\overset{!}{=}x^4y\quad\Longleftrightarrow\quad c'(y)=0,$$

d.h. $c$ ist konstant. Damit ist die allgemeine Lösung in impliziter Form gegeben durch

$$x^2+x^4y(x)^2=c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

**b)** Da $y\equiv 0$ keine Lösung der Differentialgleichung ist, können wir durch $y$ teilen und erhalten nach kurzem Umformen die Differentialgleichung

$$y'(x)=-\frac{2}{x}y(x)-\frac{1}{x^3}y(x)^{-1}.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit Exponenten $\alpha=-1$. Daher machen wir den Ansatz $z(x):=y(x)^2$, welcher uns auf folgende Differentialgleichung führt:

$$z'(x)=-\frac{4}{x}z(x)-\frac{2}{x^3}.$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$z(x)=c\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\quad c\in\mathbb{R}.$$

Rücksubstitution führt schließlich auf

$$y(x)^2=c\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\quad\Longleftrightarrow\quad x^2+x^4y(x)^2=c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

**Aufgabe 9** Mit $P(x,y):=\tan(xy)+xy$ und $Q(x,y):=x^2$ erhalten wir

$$\partial_y P(x,y)=2x+x\tan^2(xy)\neq 2x=\partial_x Q(x,y),$$

also ist die Differentialgleichung nicht exakt. Multiplikation mit dem Eulerschen Multiplikator $\mu(x,y):=u(xy)$ und anschließendem Ableiten führt auf

$$\begin{aligned}\partial_y\big(\mu(x,y)P(x,y)\big)&=xu'(xy)(\tan(xy)+xy)+u(xy)(2x+x\tan^2(xy)),\\ \partial_x\big(\mu(x,y)Q(x,y)\big)&=yu'(xy)x^2+2xu(xy).\end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$u'(xy)+\tan(xy)u(xy)=0\quad\overset{t:=xy}{\Longleftrightarrow}\quad u'(t)=-\tan(t)u(t).$$

Eine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist $u(t) = \cos(t)$. Damit ist $\mu(x,y) = \cos(xy)$ ein integrierender Faktor und die neue exakte Differentialgleichung lautet

$$\big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\big)\,\mathrm{d}x + \big(x^2\cos(xy)\big)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Zu dieser bestimmen wir nun eine Stammfunktion $F$. Integration von $\mu Q$ bezüglich $y$ liefert

$$F(x,y) = x\sin(xy) + c(x),$$

und anschließendes Ableiten nach $x$ und Gleichsetzen mit $\mu P$ führt auf $c'(x) = 0$, d.h. $c$ ist konstant. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch $F(x,y) = x\sin(xy) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $F(1, \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = c$. Die implizite Lösung ist daher gegeben durch

$$x\sin(xy) = \tfrac{1}{2}.$$

Auflösen nach $y$ liefert die explizite Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{x}\arcsin(\tfrac{1}{2x}), \quad \text{für } x > \tfrac{1}{2}$$

(beachte, dass arcsin bei $x = 1$ nicht differenzierbar ist und daher $x = \frac{1}{2}$ nicht zum Definitionsinterall der Lösung gehört).

**Aufgabe 10** Da die Funktion $f$ holomorph ist, gelten für sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, d.h. $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$. Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss außerdem $\partial_y u = \partial_x v$ gelten. Wir suchen daher Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad \partial_x u = \partial_y v\,, \qquad (2) \quad \partial_y u = -\partial_x v\,, \qquad (3) \quad \partial_y u = \partial_x v\,.$$

Erfüllen $u$ und $v$ diese Gleichungen, so folgt

$$\partial_x v \overset{(3)}{=} \partial_y u \overset{(2)}{=} -\partial_x v\,,$$

d.h. es gilt $\partial_x v = 0$, und damit auch $\partial_y u = 0$. Folglich ist $u(x,y) = U(x)$ und $v(x,y) = V(y)$ für gewisse Funktionen $U$ und $V$. Wegen (1) folgt $U'(x) = V'(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Das bedeutet aber, dass $U'(x) = V'(y) = a$ mit einer gewissen Konstante $a \in \mathbb{R}$ gelten muss. Somit haben wir

$$u(x,y) = U(x) = ax + c_1 \quad \text{und} \quad v(x,y) = V(y) = ay + c_2$$

mit gewissen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Man bestätigt nun leicht, dass für diese Funktionen tatsächlich alle drei Gleichungen erfüllt sind. Für $z = x + iy$ folgt

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = ax + c_1 + i(ay + c_2) = az + b, \qquad \text{wobei } b := c_1 + ic_2.$$

Die Gleichung ist also genau dann exakt, wenn $f(z) = az + b$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ gilt.