**Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt, WS 2012/2013**

**Höhere Mathematik III**
**für die Fachrichtung Physik**

**Aufgabe 11** **a)** Wir betrachten zunächst Geraden als Lösungen (d.h. $y'$ ist konstant). Setzen wir den Ansatz $y(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$ax + b = \frac{1}{2}x^2 - ax + a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 2a)^2 = 2a^2 + 2b.$$

Da keine Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ dies für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen können, existieren keine Geraden als Lösung.

Für den Fall, dass $y'$ nicht konstant ist, setzen wir $t := y'(x)$, $\psi(t) := x$ und $\chi(t) := y$. Dann gilt

$$\chi' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\psi'.$$

Außerdem gilt

$$\chi(t) = \tfrac{1}{2}\psi(t)^2 - t\psi(t) + t^2.$$

Zusammen führt dies auf die Gleichung

$$t\psi'(t) = \chi'(t) = \psi(t)\psi'(t) - \psi(t) - t\psi'(t) + 2t \quad \Longleftrightarrow \quad \big(2t - \psi(t)\big)\psi'(t) = \big(2t - \psi(t)\big).$$

<u>1. Fall:</u> $\psi(t) = 2t$, d.h. $\psi'(t) = 2 \neq 0$. Dann folgt

$$\chi(t) = \tfrac{1}{2}\psi(t)^2 - t\psi(t) + t^2 = t^2 = \tfrac{1}{4}\psi(t)^2,$$

also ist $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ Lösung der Differentialgleichung.

<u>2. Fall:</u> $\psi(t) \neq 2t$, d.h. $\psi'(t) = 1 \neq 0$. Dann ist $\psi(t) = t + c$, für ein $c \in \mathbb{R}$, und damit

$$\chi(t) = \tfrac{1}{2}(t + c)^2 - (t + c)t + t^2 = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}c^2.$$

Mit $t = \psi(t) - c = x - c$ erhalten wir schließlich als Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{2}(x - c)^2 + \tfrac{1}{2}c^2 = \tfrac{1}{2}x^2 - cx + c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**b)** Wir unterscheiden die beiden Fälle aus Teilaufgabe a):

<u>1. Fall:</u> Hier muss $y_0 = y(x_0) = \frac{1}{4}x_0^2$ gelten.

<u>2. Fall:</u> Setzen wir die Anfangsbedingung ein, so erhalten wir

$$y_0 = \tfrac{1}{2}x_0^2 - cx_0 + c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (c - \tfrac{1}{2}x_0)^2 = y_0 - \tfrac{1}{4}x_0^2.$$

Letzteres ist genau dann lösbar, wenn $y_0 \geq \frac{1}{4}x_0^2$. In diesem Fall erhalten wir Lösungen für

$$c_{1,2} = \tfrac{1}{2}x_0 \pm \sqrt{y_0 - \tfrac{1}{4}x_0^2}.$$

Insgesamt ist das Anfangswertproblem also lösbar für $y_0 \geq \frac{1}{4}x_0^2$.

**c)** Ist $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$, so sind

$$y_1(x) = \tfrac{1}{4}x^2 \quad \text{und} \quad y_2(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x_0x + \tfrac{1}{4}x_0^2$$

zwei verschiedene Lösungen der Gleichung.

Im Fall $y_0 > \frac{1}{4}x_0^2$ sind

$$y_1(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - c_1x_0 + c_1^2 \quad \text{und} \quad y_2(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - c_2x_0 + c_2^2$$

zwei unterschiedliche Lösungen, wobei $c_1, c_2$ die Konstanten aus Teilaufgabe b) sind.

In keinem Fall ist die Gleichung also eindeutig lösbar.

**Aufgabe 12** **a)** Da Geraden keine Lösungen sind, machen wir den Ansatz $t := y'(x)$, $\psi(t) := x$ und $\chi(t) := y$. Dies führt auf

$$\psi(t) = t + t^3 \quad \text{und die bekannte Gleichung} \quad \chi'(t) = t\psi'(t).$$

Damit erhalten wir

$$\chi'(t) = t(1 + 3t^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \chi(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{4}t^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$0 = x = \psi(t) = t + t^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 0,$$

und damit $1 = y = \chi(0) = c$. Die Lösung des Anfangswertproblems in Parameterform ist also gegeben durch

$$x = \psi(t) = t + t^3, \quad y = \chi(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{4}t^4 + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**b)** Wir betrachten zunächst Geraden als mögliche Lösungen, d.h. wir machen den Ansatz $y(x) = ax+b$ für $a,b \in \mathbb{R}$. Einsetzen führt uns auf

$$ax + b - \ln(1 + a^2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax = \ln(1 + a^2) - b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b = 0.$$

Also ist $y \equiv 0$ eine Lösung.

Ist $y'$ nicht konstant, so setzen wir $t := y'(x)$, $\psi(t) := x$ und $\chi(t) := y$, und erhalten

$$\chi(t) = \ln(1 + t^2) \quad \text{und} \quad t\psi'(t) = \chi'(t) = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi'(t) = \frac{2}{1 + t^2}.$$

Wir integrieren und erhalten

$$\psi(t) = 2\arctan(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ liefert schießlich

$$0 = y = \chi(t) = \ln(1 + t^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 0,$$

und $0 = x = \psi(0) = c$. Also ist die Lösung in Parameterform gegeben durch

$$x = \psi(t) = 2\arctan(t), \quad y = \psi(t) = \ln(1 + t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**c)** Auch hier lässt sich leicht nachprüfen, dass Geraden als Lösung nicht in Frage kommen. Daher setzen wir $t := y'(x)$, $\psi(t) := x$ und $\chi(t) := y$ und erhalten

$$\chi(t) = \psi(t)^2 e^t + t\psi(t).$$

Dies führt auf

$$t\psi'(t) = \chi'(t) = 2\psi(t)\psi'(t)e^t + \psi(t)^2 e^t + t\psi'(t) + \psi(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi'(t) = -\tfrac{1}{2}e^{-t} - \tfrac{1}{2}\psi(t).$$

Letzteres ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, deren allgemeine Lösung durch $\psi(t) = ce^{-\frac{1}{2}t} + e^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$, gegeben ist. Mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ folgt

$$1 = x = \psi(t) \quad \text{und} \quad 1 = y = \chi(t) = 1 \cdot e^t + 1 \cdot t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 0.$$

Einsetzen in $\psi$ führt auf $1 = \psi(0) = c + 1$, d.h. $c = 0$. Als Lösung erhalten wir schließlich

$$x = \psi(t) = e^{-t}, \quad y = \chi(t) = e^{-2t}e^t + te^{-t} = (1 + t)e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 13** Wir werden hier 2 Möglichkeiten zeigen, diese Differentialgleichung zu lösen.

1. Möglichkeit: Wir behandeln die Differentialgleichung als implizite Differentialgleichung der Form $F(r, r', r'') = 0$, wobei $F(x, y, z) = z + \frac{\gamma M}{x^2}$. Hierbei verwenden wir die Methode aus 24.8 c) des Vorlesungsskripts: Wir setzen $\tau := r(t)$ und $p(\tau) := r'(t)$, d.h. $r'(t) = p\big(r(t)\big)$. Es gilt nun

$$r'' = \frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = p'(\tau)p(\tau).$$

Wir erhalten also die Differentialgleichung $p'(\tau)p(\tau) = -\frac{\gamma M}{\tau^2}$. Integration führt dann auf $p(\tau)^2 = 2\frac{\gamma M}{\tau} + c$. Setzen wir nun unter Berücksichtigung von $p(r(0)) = r'(0)$ die Anfangsbedingungen $r'(0) = v_0$ und $r(0) = R$ ein, so erhalten wir

$$c = v_0^2 - 2\tfrac{\gamma M}{R}$$

und somit die Differentialgleichung

$$(r')^2 = 2\tfrac{\gamma M}{r} + v_0^2 - 2\tfrac{\gamma M}{R}.$$

Für $t \to \infty$ fordern wir nun $r(t) \to \infty$, d.h. $v_0^2 - 2\frac{\gamma M}{R} = \lim_{t\to\infty} r'(t)^2 \geq 0$. Das kleinstmögliche $v_0$ das diese Gleichung noch erfüllt, ist daher gegeben durch

$$v_0 = \sqrt{2\tfrac{\gamma M}{R}} \approx 11,2\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Für dieses $v_0$ vereinfacht sich obige Differentialgleichung zu $r' = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$. Mit Trennung der Variablen erhalten wir

$$r(t) = \big(\tfrac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + c\big)^{2/3}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und $r(0) = R$ führt schließlich auf

$$r(t) = \big(\tfrac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + R^{3/2}\big)^{2/3}.$$

2. Möglichkeit: Wir multiplizieren die Gleichung mit $2r'$ (wobei wir $r' \neq 0$ annehmen können, da wir keine konstanten Lösungen haben). Dies führt auf

$$2r'r'' = -2r'\tfrac{\gamma M}{r^2}.$$

Führen wir nun eine Integration auf beiden Seiten aus, so erhalten wir $r'^2 = 2\frac{\gamma M}{r} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Randbedinungen führt auf

$$v_0^2 = 2\tfrac{\gamma M}{R} + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = v_0^2 - 2\tfrac{\gamma M}{R}.$$

Dies liefert die Differentialgleichung

$$(r')^2 = 2\tfrac{\gamma M}{r} + v_0^2 - 2\tfrac{\gamma M}{R},$$

auf welche wir auch beim 1. Lösungsverfahren gestoßen sind. Gleiches Vorgehen wie dort liefert schließlich die Lösung.

**Aufgabe 14** Wir suchen zwei Funktionen $p$ und $q$, sodass $y_1$ und $y_2$ die homogene lineare Differentialgleichung $y'' + py' + qy = 0$ lösen. Dann erfüllt die Wronski-Determinante

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} w'(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)\big(-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)\big) - y_2(x)\big(-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)\big) \\ &= -p(x)\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) \\ &= -p(x)w(x). \end{aligned}$$

Für $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = \cos(2x)$ gilt dann

$$\begin{aligned} w(x) &= -2e^x \sin(2x) - e^x \cos(2x), \\ w'(x) &= -5e^x \cos(2x). \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$p(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{5\cos(2x)}{\cos(2x) + 2\sin(2x)}.$$

Setzen wir $y_1$ in die Gleichung ein, so erhalten wir für $q$

$$e^x + p(x)e^x + q(x)e^x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(x) = -1 - p(x) = \frac{4\cos(2x) - 2\sin(2x)}{\cos(2x) + 2\sin(2x)}.$$

Als Differentialgleichung erhalten wir schließlich

$$\big(\cos(2x) + 2\sin(2x)\big)y'' - 5\cos(2x)y' + \big(4\cos(2x) - 2\sin(2x)\big)y = 0.$$

**Aufgabe 15** Durch Einsetzen sieht man leicht, dass $u$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Nun können wir das Reduktionsverfahren von d'Alembert anwenden, um die allgemeine Lösung zu finden. Der Ansatz $y(x) = w(x)u(x)$ führt auf

$$\begin{aligned} xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y &= x(w''u + 2w'u' + wu'') - (2x+1)(w'u + wu') + (x+1)uw \\ &= x\, e^x w'' - e^x w' \overset{!}{=} (x^2+1)e^x. \end{aligned}$$

D.h. $v := w'$ erfüllt die Gleichung $v' = \frac{1}{x}v + x + \frac{1}{x}$. Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $v_{\text{hom}}(x) = c\, \exp\Big(\int 1/x \,\mathrm{d}x\Big) = c\, x$, $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung erhalten wir nun mittels Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz $y(x) = c(x)x$. Einsetzen liefert

$$c'(x)x = x + \tfrac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad c'(x) = 1 + \tfrac{1}{x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad c(x) = x - \tfrac{1}{x} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

D.h. $v_p(x) = (x - \frac{1}{x})x = x^2 - 1$ ist ein spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $v$ ist somit gegeben durch

$$v(x) = x^2 - 1 + c\, x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für $w$ erhalten wir damit $w(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + c_1x^2 + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, und als allgemeine Lösung schließlich

$$y(x) = w(x)u(x) = (\tfrac{1}{3}x^3 - x)e^x + c_1x^2e^x + c_2e^x, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$