

**Höhere Mathematik III  
für die Fachrichtung Physik**

**4. Übungsblatt**

**Aufgabe 16**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

- a)  $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0;$
- b)  $y''' + 7y'' + 19y' + 13y = 0;$
- c)  $y''' + 3y'' + 3y' + y = x + 6e^{-x};$

und lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

- d)  $y'' - 2y' + 2y = e^{2x} \sin(x), \quad y(0) = \frac{3}{5}, \quad y'(0) = 1.$

**Aufgabe 17**

Eine Masse von 5 kg dehnt eine Feder um 0.1 m. Dieses System befindet sich in einer viskosen Flüssigkeit, wodurch auf die Masse bei einer Geschwindigkeit von  $0.04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  eine bremsende Kraft von 2 N wirkt (gehen Sie von einer Stokes-Reibung aus). Es wirkt außerdem eine äußere Kraft

$$F_A = 5 \cos(10t) \text{ N}, \quad t > 0.$$

- a) Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren allgemeine reelle Lösung.
- b) Die Masse wird nun um 1 m aus der Ruhelage ausgelenkt und dort losgelassen. Bestimmen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

**Aufgabe 18**

Bestimmen Sie für  $x > 0$  die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

- a)  $x^2 y^{(4)}(x) + 5x y'''(x) + y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) - \frac{2}{x^2} y(x) = 0;$
- b)  $x^4 y^{(4)}(x) + 6x^3 y'''(x) - 2x y'(x) + 20y(x) = 0;$
- c)  $x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = 1 + (\ln x)^2;$

und lösen Sie für  $x > 0$  das folgende Anfangswertproblem:

- d)  $y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$

### Aufgabe 19

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + 2xy' - y = (1 + x + x^2)e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2},$$

welches mit einem Potenzreihenansatz  $y(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$  gelöst werden kann.

- a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten  $a_n$  an.
- b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten explizit gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot (n-1)!}, \quad n \geq 1.$$

- c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems in geschlossener Form an.

### Aufgabe 20

Bestimmen Sie unter Verwendung eines abgewandelten Potenzreihenansatzes die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + \frac{3}{2} x y'(x) + x y(x) = 0, \quad x > 0.$$