Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt, WS 2012/2013

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 16 Bei allen Aufgabenteilen handelt es sich um (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Für die jeweilige homogene Gleichung machen wir hier stets den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

a) Setzen wir den Ansatz ein, so erhalten wir

$$\lambda^3 e^{\lambda x} - 3\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0.$$

Nun raten wir eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms* (z.B. $\lambda_1 = 1$), führen eine Polynomdivision durch und lösen anschließend die dabei entstehende quadratische Gleichung. Dies führt uns auf

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0,$$

d.h. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -1$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Daher ist

$$\{e^x,\, e^{3x},\, e^{-x}\}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und wir erhalten

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

als deren allgemeine Lösung.

b) Bei dieser Gleichung erhalten wir als charakteristisches Polynom

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 19\lambda + 13 = (\lambda + 1)(\lambda + 3 - 2i)(\lambda + 3 + 2i),$$

mit Nullstellen $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3 + 2i$ und $\lambda_3 = -3 - 2i$. Als Fundamentalsystem erhalten wir daher

$$\{e^{-x},\, e^{-3x}\cos(2x),\, e^{-3x}\sin(2x)\},$$

und die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}\cos(2x) + c_3 e^{-3x}\sin(2x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

c) Um die vorliegende inhomogene Gleichung zu lösen, berechnen wir zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (wie bei a) und b)) und machen anschließend einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite*. Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung ist

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3,$$

d.h. wir haben die dreifache Nullstelle $\lambda = -1$. Als Fundamentalsystem erhalten wir damit

$$\{e^{-x},\, xe^{-x},\, x^2 e^{-x}\}$$

und als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Bei inhomogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Inhomogenität $p(x)e^{\sigma x}\cos(\omega x)$ oder $p(x)e^{\sigma x}\sin(\omega x)$ können wir eine spezielle Lösung mit dem Ansatz

$$y_p(x) = q_1(x) x^k e^{\sigma x}\cos(\omega x) + q_2(x) x^k e^{\sigma x}\sin(\omega x)$$

finden, wobei q_1 und q_2 Polynome von gleichem Grad wie p sind und k die Vielfachheit der Nullstelle $\sigma+i\omega$ im charakteristischen Polynom ist (d.h. der Ausdruck x^k in obigem Ansatz fällt weg, falls $\sigma+i\omega$ keine Nullstelle ist). Tritt nun eine *Summe* aus Inhomogenitäten der obigen Form auf, so bilden wir die *Summe* der jeweiligen Ansätze. Ein Ansatz dieser Art heißt *Ansatz vom Typ der rechten Seite.*

In unserem Fall wählen wir also den Ansatz: $y_p(x) = ax + b + cx^3e^{-x}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hier gilt

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a + ce^{-x}(-x^3 + 3x^2), \\ y_p''(x) &= ce^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x), \\ y_p'''(x) &= ce^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$y_p'''(x) + 3y_p''(x) + 3y_p'(x) + y_p(x) = ax + (3a + b) + 6ce^{-x} \overset{!}{=} x + 6e^{-x},$$

d.h. mit $a = 1, b = -3, c = 1$ erhalten wir $y_p(x) = x - 3 + x^3e^{-x}$ als spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = x - 3 + x^3e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

d) Wie bei Teilaufgabe c) berechnen wir zuerst die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die homogene Gleichung $y'' - 2y' + 2y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet somit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1e^x \cos(x) + c_2e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Als Ansatz für eine spezielle Lösung machen wir hier den Ansatz

$$y_p(x) = ae^{2x} \cos(x) + be^{2x} \sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (2a + b)e^{2x} \cos(x) + (-a + 2b)e^{2x} \sin(x), \\ y_p''(x) &= (3a + 4b)e^{2x} \cos(x) + (-4a + 3b)e^{2x} \sin(x). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = (a + 2b)e^{2x} \cos(x) + (-2a + b)e^{2x} \sin(x) \overset{!}{=} e^{2x} \sin(x) \iff a + 2b = 0 \wedge -2a + b = 1.$$

Als Lösung erhalten wir daraus $a = -\frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$ und damit $y_p(x) = -\frac{2}{5}e^{2x} \cos(x) + \frac{1}{5}e^{2x} \sin(x)$, sowie

$$y(x) = -\tfrac{2}{5}e^{2x} \cos(x) + \tfrac{1}{5}e^{2x} \sin(x) + c_1e^x \cos(x) + c_2e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Zur Lösung des Anfangswertproblems leiten wir zunächst ab und erhalten

$$y'(x) = \tfrac{4}{5}e^{2x} \sin(x) - \tfrac{3}{5}e^{2x} \cos(x) + (-c_1 + c_2)e^x \sin(x) + (c_1 + c_2)e^x \cos(x).$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen führt uns schließlich auf

$$y(0) = \tfrac{3}{5} \iff c_1 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} \iff c_1 = 1,$$

und

$$y'(0) = 1 \iff -\tfrac{3}{5} + (1 + c_2) = 1 \iff c_2 = \tfrac{3}{5}.$$

Die Lösung ist damit gegeben durch

$$y(x) = \tfrac{1}{5}e^{2x}\big(\sin(x) - 2\cos(x)\big) + \tfrac{1}{5}e^x\big(3\sin(x) + 5\cos(x)\big).$$

Aufgabe 17 **a)** Für die resultierende Gesamtkraft gilt

$$F_{\text{ges}} = F_G + F_F + F_D + F_A,$$

wobei $F_G = mg$ die Gewichtskraft, $F_F = -Ds$ die Federkraft und $F_D = -\sigma v$ die Dämpfung beschreiben. Sei nun s_0 die Auslenkung der Feder, falls sich Gewichtskraft und Federkraft genau ausgleichen. Legen wir außerdem das Nullniveau auf diese Höhe, so erhalten wir (positive Auslenkung nach unten)

$$\begin{aligned} ma &= mg - D(s_0 + s) - \sigma v + 5\cos(10t) \\ \iff \quad & ms'' + \sigma s' + Ds = 5\cos(10t). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Aus den Angaben können wir nun D und σ berechnen. Da $m = 5$ kg und $s_0 = 0.1$ m, ist $D = 500\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Bei $v = 0.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist $F_D = -2N$ und damit $\sigma = 50\frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}}$. Einsetzen aller Größen führt uns schließlich auf die Gleichung (Einheiten werden in den folgenden Rechnungen weggelassen)

$$s''(t) + 10s'(t) + 100s(t) = \cos(10t).$$

Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung $s'' + 10s' + 100s = 0$ lautet

$$\lambda^2 + 10\lambda + 100 = (\lambda + 5 - 5\sqrt{3}i)(\lambda + 5 + 5\sqrt{3}i),$$

und wir erhalten

$$s_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}t) + c_2 e^{-5t}\sin(5\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

als deren allgemeine Lösung. Als Ansatz für eine spezielle Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite, d.h. in diesem Fall wählen wir

$$s_p(t) = a\cos(10t) + b\sin(10t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hierfür gilt

$$\begin{aligned} s_p'(t) &= -10a\sin(10t) + 10b\cos(10t), \\ s_p''(t) &= -100a\cos(10t) - 100b\sin(10t). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$s_p''(t) + 10s_p'(t) + 100s_p(t) = -100a\sin(10t) + 100b\cos(10t) \overset{!}{=} \cos(10t) \iff a = 0 \ \wedge \ b = \tfrac{1}{100},$$

d.h. $s_p(t) = \frac{1}{100}\sin(10t)$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$s(t) = \tfrac{1}{100}\sin(10t) + c_1 e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}t) + c_2 e^{-5t}\sin(5\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Die Angaben entsprechen den Anfangsbedingungen $s(0) = 1$ und $s'(0) = 0$. Leiten wir die allgemeine Lösung ab, so erhalten wir

$$s'(t) = \tfrac{1}{10}\cos(10t) + (-5c_1 + 5\sqrt{3}c_2)e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}t) + (-5\sqrt{3}c_1 - 5c_2)e^{-5t}\sin(5\sqrt{3}t).$$

Einsetzen liefert dann

$$s(0) = c_1 = 1 \quad \text{und} \quad s'(0) = \tfrac{1}{10} - 5c_1 + 5\sqrt{3}c_2 = 0 \iff c_1 = 1, c_2 = \tfrac{49}{150}\sqrt{3},$$

und wir erhalten als Lösung

$$s(t) = \tfrac{1}{100}\sin(10t) + e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}t) + \tfrac{49}{150}\sqrt{3}e^{-5t}\sin(5\sqrt{3}t).$$

Aufgabe 18 Bei genauerer Betrachtung erkennenn wir, dass es sich bei den folgenden Aufgaben stets um (homogene bzw. inhomogene) Euler'sche Differentialgleichungen handelt. Hier machen wir die Substitution $x = e^t \iff t = \ln x$, welche uns auf eine (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $u(t) = y(e^t)$ führt. Diese könnten wir nun mit den bekannten Methoden lösen und anschließend rücksubstituieren. Es ist hierbei allerdings nicht zwingend notwendig die andere Differentialgleichung auszurechnen. In der Lösungstheorie für lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten machen wir stets den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Setzen wir in diesen nun die Substitution $t = \ln x$ ein, so erhalten wir

$$y(x) = u(\ln x) = e^{\lambda \ln x} = x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

als Ansatz, mit dem wir auch direkt eine Lösung berechnen können.

a) Der Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, führt auf

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)x^{\lambda-4+2} + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3+1} + \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 2\lambda x^{\lambda-1-1} - 2x^{\lambda-2} = 0\\ \iff \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0.\end{aligned}$$

Wir erhalten also das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2\\ &= (\lambda-1)\big(\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-2) + \lambda + 2\big)\\ &= (\lambda-1)(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = (\lambda-1)^3(\lambda+2)\end{aligned}$$

mit der dreifachen Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und der einfachen Nullstelle $\lambda_2 = -2$. Damit ist

$$\{x,\, x\ln x,\, x(\ln x)^2,\, x^{-2}\}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und als allgemeine Lösung erhalten wir

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x(\ln x)^2 + c_4 x^{-2}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Setzen wir den Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ein, so erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 6\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda + 20\\ &= \lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20\\ &= (\lambda+2)^2(\lambda-2-i)(\lambda-2+i).\end{aligned}$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = -2$ und den einfachen Nullstellen $\lambda_2 = 2+i$ und $\lambda_3 = 2-i$. Damit erhalten wir als Fundamentalsystem

$$\{x^{-2},\, x^{-2}\ln x,\, x^2\cos(\ln x),\, x^2\sin(\ln x)\},$$

und als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2}\ln x + c_3 x^2\cos(\ln x) + c_4 x^2 \sin(\ln x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

c) Wir substituieren $t := \ln x$ und setzen $u(t) := y(e^t) \iff y(x) = u(\ln x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}y'(x) &= u'(\ln x)\tfrac{1}{x},\\ y''(x) &= u''(\ln x)\tfrac{1}{x^2} - u'(\ln x)\tfrac{1}{x^2},\\ y'''(x) &= u'''(\ln x)\tfrac{1}{x^3} - 3u''(\ln x)\tfrac{1}{x^3} + 2u'(\ln x)\tfrac{1}{x^3}.\end{aligned}$$

Einsetzen führt uns dann auf die Differentialgleichung

$$u'''(t) - u(t) = 1 + t^2.$$

Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung ist

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)(\lambda + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für u ist somit

$$u_{\text{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t) + c_3 e^{-t/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da die Inhomogenität ein Polynom 2. Grades ist, machen wir den Ansatz

$$u_p(t) = at^2 + bt + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

mit $u_p'(t) = 2at + b$, $u_p''(t) = 2a$ und $u_p'''(t) = 0$ (an dieser Stelle sei angemerkt, dass wir ohne Substitution den Ansatz $y_p(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$ hätten wählen können). Setzen wir ein, so erhalten wir mit Koeffizientenvergleich

$$-at^2 - bt - c \overset{!}{=} 1 + t^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = -1,\ b = 0,\ c = -1,$$

also $u_p(t) = -t^2 - 1$. Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für u gegeben durch

$$u(t) = -t^2 - 1 + c_1 e^t + c_2 e^{-t/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t) + c_3 e^{-t/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

und nach Rücksubstitution erhalten wir schließlich als Lösung

$$y(x) = -(\ln x)^2 - 1 + c_1 x + c_2 x^{-1/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln x) + c_3 x^{-1/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

d) Setzen wir den Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ein, so erhalten wir als charakteristisches Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist damit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 x + c_2 x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung wollen wir uns an den Ansätzen vom Typ der rechten Seite orientieren. Mit der Substitution $t := \ln x$ hätten wir als Inhomogenität das Polynom t von Grad 1 erhalten, d.h. wir würden $at + b$ als speziellen Ansatz wählen. Mit obiger Substitution erhalten wir aber gerade den Ansatz

$$y_p(x) = a\ln x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit $y_p'(x) = a\frac{1}{x}$ und $y_p''(x) = -a\frac{1}{x^2}$. Multiplikation der Differentialgleichung mit x^2 und Einsetzen des Ansatzes führt uns auf

$$-a + a - a\ln x - b \overset{!}{=} a\ln x + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = -1,\ b = 0,$$

d.h. $y_p(x) = -\ln x$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = -\ln x + c_1 x + c_2 x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung davon ist $y'(x) = -\frac{1}{x} + c_1 - c_2\frac{1}{x^2}$, und mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$y(1) = c_1 + c_2 = 2 \quad \text{und} \quad y'(1) = -1 + c_1 - c_2 = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1 = c_2 = 1.$$

D.h. die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = -\ln x + x + x^{-1}.$$

Aufgabe 19 **a)** Wir machen einen Potenzreihenansatz, d.h. es gilt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\begin{aligned} y'' + 2xy' - y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + 2n a_n x^n - a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n\big) x^n. \end{aligned}$$

Einsetzen der Exponentialreihe auf der rechten Seite der Gleichung führt zu

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)e^x = (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}x^n \\ &= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\Big)x^n \\ &= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke gleich, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n\big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!}x^n.$$

Da die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig sind, folgt direkt

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n = \frac{1+n^2}{n!},$$

und daraus erhalten wir die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geq 0.$$

b) Wir wollen die Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Setzen wir die Anfangswerte ein, so erhalten wir

$$y(0) = a_0 = 0, \quad y'(0) = a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 0!}.$$

Damit folgt

$$a_2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2 \cdot 1!},$$

d.h. die Aussage ist korrekt für $n = 1, 2$ und der Induktionsanfang ist gemacht. Gilt die Aussage $a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2\cdot n!}$ für ein $n \geq 1$ (IV), so folgt

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} a_n \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{2\cdot(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2+2n^2-(2n-1)n}{(n+2)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+n}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{2\cdot(n+1)!}, \end{aligned}$$

und völlig analog $a_{n+3} = \frac{1}{2\cdot(n+2)!}$.

c) Mit Aufgabenteil b) gilt nun $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}$ für $n \geq 1$. Damit folgt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot(n-1)!} x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \frac{x}{2} e^x.$$

Aufgabe 20 Wir machen den Ansatz

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda-2},$$

und wir erhalten wir für die linke Seite der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x^2y'' + \tfrac{3}{2}xy' + xy &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{3}{2}(n+\lambda) a_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda+1} \\ &= \lambda(\lambda-1) a_0 x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda} + \tfrac{3}{2}\lambda a_0 x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{3}{2}(n+\lambda) a_n x^{n+\lambda} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+\lambda} \\ &= \lambda(\lambda + \tfrac{1}{2}) a_0 x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \big((n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n + \tfrac{3}{2}(n+\lambda) a_n + a_{n-1}\big) x^{n+\lambda} \\ &= \lambda(\lambda + \tfrac{1}{2}) a_0 x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \big((n+\lambda)(n+\lambda+\tfrac{1}{2}) a_n + a_{n-1}\big) x^{n+\lambda}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich für $n = 0$ liefert die determinierende Gleichung $\lambda(\lambda + \frac{1}{2}) = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$ erhalten wir nach Vorlesung ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung von der Form

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

Für $\lambda_1 = 0$ machen wir einen Koeffizientenvergleich (mit $0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$) und erhalten

$$n(n+\tfrac{1}{2})c_n + c_{n-1} = 0 \quad \iff \quad c_n = -\frac{4c_{n-1}}{2n(2n+1)}, n \geq 1.$$

Wir wählen nun $c_0 = 1$ (hier könnten wir jeden Wert ungleich 0 wählen) und erhalten so

$$c_1 = -\frac{4}{6} = -\frac{4}{3!} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{4\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{4^2}{5!}.$$

Ausgehend davon vermuten wir $c_n = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was sich durch vollständige Induktion auch bestätigt: Für $n = 0$ ist die Aussage wahr. Nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein beliebiges $n \geq 0$ wahr ist (IV), so folgt

$$c_{n+1} = -\frac{4c_n}{(2n+2)(2n+3)} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{(-4)^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{(-4)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}.$$

Damit folgt

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} \sqrt{x}^{2n} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(2\sqrt{x}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2\sqrt{x}).$$

Im Falle von $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ liefert ein Koeffizientenvergleich

$$(n - \tfrac{1}{2}) n d_n + d_{n-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_n = -\frac{4d_{n-1}}{2n(2n-1)}, \quad n \geq 1.$$

Völlig analog zum ersten Fall lässt sich nun für $d_0 = 1$ induktiv zeigen, dass die Koeffizienten explizit durch

$$d_n = \frac{(-4)^n}{(2n)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gegeben sind. Damit folgt

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{n-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \sqrt{x}^{2n} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(2\sqrt{x}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(2\sqrt{x}).$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(2\sqrt{x}) + c_2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(2\sqrt{x}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$