KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Markus Antoni

WS 2012/2013
06.12.2012

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 21

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Erfüllt f eine Lipschitzbedingung, so kann die Lösung von Anfangswertproblemen der Form

$$\vec{y}\,'(x) = f\big(x, \vec{y}(x)\big), \quad x \in I, \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0,$$

durch das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf gelöst werden. Hierbei setzen wir

$$\begin{aligned} \vec{y}_0(x) &:= \vec{y}_0, \\ \vec{y}_{n+1}(x) &:= \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \vec{y}_n(t)\big)\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

und erhalten als Lösung $\vec{y}(x) := \lim_{n\to\infty} \vec{y}_n(x)$.

Wenden Sie dieses Verfahren auf folgende Anfangswertprobleme an und geben Sie die Lösung explizit an:

a) $y' = 2xy + 2x^3, \quad y(0) = 0;$

b) $y' = (1+y)\cos(x), \quad y(0) = 1;$

c) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 22

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0,\ |y| < 1, \\ 2x, & \text{für } 0 < |x| < 1,\ -1 < y < 0, \\ 2x - 4\frac{y}{x}, & \text{für } 0 < |x| < 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ -2x, & \text{für } 0 < |x| < 1,\ x^2 \leqslant y < 1, \end{cases}$$

und das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \quad y(0) = 0.$$

a) Vergewissern Sie sich, dass f stetig ist.

b) Wenden Sie das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf an. Was fällt Ihnen hierbei auf?

— bitte wenden —

Aufgabe 23

Es seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$(\star) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

als System linearer Differentialgleichungen dar. Setzen Sie dazu

$$z_1 := y, \quad z_2 := y', \quad \ldots \quad z_n := y^{(n-1)}$$

und $\vec{z} := (z_1, \ldots, z_n)$. Geben Sie nun eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, sodass $\vec{z}$ genau dann eine Lösung von

$$\vec{z}\,' = A\vec{z}$$

ist, wenn y die Differentialgleichung $(\star)$ erfüllt. Berechnen Sie anschließend $\det(\lambda I - A)$.

Aufgabe 24

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme mit dem Eliminationsverfahren:

a) $u' = u + v, \quad v' = u - v, \qquad u(0) = 1, \quad v(0) = 0;$

b) $u' = 3u + 3v + x, \quad v' = -u - v + 1, \qquad u(0) = v(0) = 0;$

c) $u' = 7u + 4w, \quad v' = 8u + 3v + 8w, \quad w' = -8u - 5w, \qquad u(0) = v(0) = w(0) = 1.$

Aufgabe 25

Die Verteilung und der Abbau von Alkohol kann durch das folgende einfache Modell beschrieben werden:

Mit $B(t)$ bezeichnet man die Menge an Alkohol im Blut zum Zeitpunkt $t \geqslant 0$, mit $G(t)$ die Menge an Alkohol im Gewebe. Der Austausch des Alkohols zwischen Blut und Gewebe sowie die Ausscheidung werden durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} B'(t) &= -\alpha B(t) - \beta B(t) + \gamma G(t), \quad B(0) = B_0, \\ G'(t) &= \beta B(t) - \gamma G(t), \quad G(0) = G_0, \end{aligned}$$

beschrieben. Dabei beschreibt der Koeffizient $\alpha > 0$ die Geschwindigkeit der Ausscheidung aus dem Körper, der Koeffizient $\beta > 0$ die Geschwindigkeit des Übergangs vom Blut ins Gewebe und der Koeffizient $\gamma > 0$ die des Übergangs vom Gewebe ins Blut.

Lösen Sie dieses Differentialgleichungssystem mit der Eliminationsmethode.