Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt, WS 2012/2013

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 21 **a)** Hier ist $I = \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = 2xy + 2x^3$, welches stetig partiell differenzierbar ist und damit einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Wenden wir nun das Iterationsverfahren an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y(0) = 0,\\
y_1(x) &= 0 + \int_0^x f(t,0)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t^3\,\mathrm{d}t = \tfrac12 x^4,\\
y_2(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t,\tfrac12 t^4\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^5 + 2t^3\,\mathrm{d}t = \tfrac16 x^6 + \tfrac12 x^4,\\
y_3(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t,\tfrac16 t^6 + \tfrac12 t^4\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \tfrac13 t^7 + t^5 + 2t^3\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{24}x^8 + \tfrac16 x^6 + \tfrac12 x^4.
\end{aligned}$$

Wir vermuten daher die Formel

$$y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \tfrac{1}{k!} x^{2k}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Dies wollen wir mit vollständiger Induktion beweisen. Den Induktionsanfang haben wir oben bereits gemacht. Nehmen wir nun an, dass die Behauptung für ein $n\in\mathbb{N}$ wahr ist (IV), so folgt

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f\big(t, y_n(t)\big)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(IV)}}{=} \int_0^x \sum_{k=2}^{n+1} \tfrac{2}{k!} t^{2k+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^x 2t^3\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n+1} \tfrac{1}{(k+1)!} x^{2k+2} + \tfrac12 x^4 = \sum_{k=2}^{n+2} \tfrac{1}{k!} x^{2k}.$$

Als Lösung erhalten wir damit

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n+2} \tfrac{1}{k!} x^{2k} = -1 - x^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n+2} \tfrac{1}{k!} x^{2k} = -1 - x^2 + e^{x^2}.$$

b) Auch hier ist $I = \mathbb{R}$ und für f haben wir die Funktion $f(x,y) = (1+y)\cos(x)$, welches stetig partiell differenzierbar und damit auch lokal Lipschitz stetig ist. Bei der Picarditeration erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y(0) = 1,\\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x f(t,1)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x 2\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sin(x),\\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x f\big(t, 1 + 2\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x 2\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sin(x) + \sin(x)^2,\\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x f\big(t, 1 + 2\sin(t) + \sin(t)^2\big)\,\mathrm{d}t\\
&= 1 + \int_0^x 2\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \sin(t)^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sin(x) + \sin(x)^2 + \tfrac13\sin(x)^3,\\
y_4(x) &= 1 + \int_0^x f\big(t, 1 + 2\sin(t) + \sin(t)^2 + \tfrac13\sin(t)^3\big)\,\mathrm{d}t\\
&= 1 + \int_0^x 2\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \sin(t)^2\cos(t) + \tfrac13\sin(t)^3\cos(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 1 + 2\sin(x) + \sin(x)^2 + \tfrac13\sin(x)^3 + \tfrac{1}{12}\sin(x)^4.
\end{aligned}$$

Damit kommen wir zu der Vermutung

$$y_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!}\sin(x)^k, \quad n\in\mathbb{N},$$

die wir induktiv beweisen wollen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Gilt obige Formel für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x f\big(t, y_n(t)\big)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(IV)}}{=} 1 + \int_0^x 2\cos(t) + 2\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!}\sin(t)^k \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + 2\sin(x) + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{(k+1)!}\sin(x)^{k+1} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n+1} \tfrac{1}{k!}\sin(x)^k.
\end{aligned}
$$

Damit folgt dann

$$
y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\sin(x)^k = -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\sin(x)^k = -1 + 2e^{\sin(x)}.
$$

c) In dieser Teilaufgabe ist $I = \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $f(x, y_1, y_2) = (y_2, \lambda^2 y_1)$. Dieses ist stetig partiell differenzierbar und erfüllt damit die gewünschte Lipschitz-Bedingung. Das Iterationsverfahren führt nun zu

$$
\begin{aligned}
\vec{y}_0(x) &= \vec{y}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \\
\vec{y}_1(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x f\big(t, \vec{y}_0(t)\big)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix}1 + \int_0^x 0\,\mathrm{d}t\\ \int_0^x \lambda^2\,\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \lambda^2 x\end{pmatrix}, \\
\vec{y}_2(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x f\big(t, \vec{y}_1(t)\big)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix}1 + \int_0^x \lambda^2 t\,\mathrm{d}t\\ \int_0^x \lambda^2\,\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2\\ \lambda^2 x\end{pmatrix}, \\
\vec{y}_3(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x f\big(t, \vec{y}_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix}1 + \int_0^x \lambda^2 t\,\mathrm{d}t\\ \int_0^x \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^4 t^2\,\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2\\ \lambda^2 x + \frac{1}{6}\lambda^4 x^3\end{pmatrix}, \\
\vec{y}_4(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x f\big(t, \vec{y}_3(t)\big)\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix}1 + \int_0^x \lambda^2 t + \frac{1}{6}\lambda^4 t^3\,\mathrm{d}t\\ \int_0^x \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^4 t^2\,\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 + \frac{1}{24}\lambda^4 x^4\\ \lambda^2 x + \frac{1}{6}\lambda^4 x^3\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dies führt uns auf die Vermutung

$$
\vec{y}_n(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{1}{(2k)!}\lambda^{2k}x^{2k} \\ \lambda \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \frac{1}{(2k+1)!}\lambda^{2k+1}x^{2k+1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},
$$

die wir nun mit vollständiger Induktion beweisen wollen. Für $n = 1$ haben wir die Aussage bereits gezeigt. Nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein fixiertes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, so folgt

$$
\begin{aligned}
\vec{y}_{n+1}(x) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x f\big(t, \vec{y}_n(t)\big)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(IV)}}{=} \begin{pmatrix} 1 + \int_0^x \lambda \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \frac{1}{(2k+1)!}\lambda^{2k+1}t^{2k+1}\,\mathrm{d}t \\ \int_0^x \lambda^2 \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{1}{(2k)!}\lambda^{2k}t^{2k}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \frac{1}{(2k+2)!}\lambda^{2k+2}x^{2k+2} \\ \lambda \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{1}{(2k+1)!}\lambda^{2k+1}x^{2k+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor} \frac{1}{(2k)!}\lambda^{2k}x^{2k} \\ \lambda \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{1}{(2k+1)!}\lambda^{2k+1}x^{2k+1} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

wobei wir $\lfloor (n-1)/2\rfloor + 1 = \lfloor (n+1)/2\rfloor$ benutzt haben. Als Lösung erhalten wir schließlich

$$
\vec{y}(x) = \lim_{n\to\infty} \vec{y}_n(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\lambda^{2k}x^{2k} \\ \lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\lambda^{2k+1}x^{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(\lambda x)\\ \lambda\sinh(\lambda x)\end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 22 **a)** Die Funktion f ist auf $(-1,1)\times(-1,1)$ stetig, denn sie ist in den einzelnen Teilbereichen stetig und die Definitionen stimmen an den gemeinsamen Rändern überein.

b) Führen wir für $x\in(-1,1)$ die Iteration von Picard-Lindelöf aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y(0) = 0,\\
y_1(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t, y_0(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2,\\
y_2(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t, y_1(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -2t\,\mathrm{d}t = -x^2,\\
y_3(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t, y_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2,
\end{aligned}$$

und damit folgt

$$y_n(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } n \text{ ungerade},\\ -x^2, & \text{falls } n \text{ gerade}.\end{cases}$$

Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert hier also nicht. Auch die konvergenten Teilfolgen $(y_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren nicht gegen eine Lösung der Differentialgleichung, denn für $u_1(x) := x^2$ und $u_2(x) := -x^2$ gilt

$$u_1'(x) = 2x \neq -2x = f\big(x, u_1(x)\big) \quad \text{und} \quad u_2'(x) = -2x \neq 2x = f\big(x, u_2(x)\big).$$

Da f aber stetig ist, existiert nach dem Satz von Peano (mindestens) eine Lösung. Hier ist z.B. $y(x) = \frac{1}{3}x^2$ eine Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 23 Wir schreiben $z_1 := y$, $z_2 := y', \ldots, z_n := y^{(n-1)}$ und

$$\vec{z}(x) := \begin{pmatrix} z_1(x)\\ z_2(x)\\ \vdots\\ z_n(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x)\\ y'(x)\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}.$$

Dann erfüllt y die Gleichung $(\star)$ genau dann, wenn $\vec{z}$ eine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems ist:

$$\begin{aligned}
z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x),\\
z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x),\\
&\vdots\\
z_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) = z_n(x),\\
z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -a_0 y(x) - \cdots - a_{n-1}y^{(n-1)}(x) = -a_0 z_1(x) - \cdots - a_{n-1}z_n(x).
\end{aligned}$$

Dies können wir schreiben als

$$\vec{z}\,'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x)\\ z_2'(x)\\ \vdots\\ z_{n-1}'(x)\\ z_n'(x)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & \dots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{pmatrix}}_{=:A_n\in\mathbb{R}^{n\times n}} \begin{pmatrix} z_1(x)\\ z_2(x)\\ \vdots\\ z_{n-1}(x)\\ z_n(x)\end{pmatrix} = A_n\vec{z}(x).$$

Für $n=1$ ist $A_1 = \big(-a_0\big)$ und daher

$$\det(\lambda I - A_1) = \det(\lambda + a_0) = \lambda + a_0.$$

Ist $n = 2$, so ist $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ und somit

$$\det(\lambda I - A_2) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 & \lambda + a_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda a_1 + a_0.$$

Per vollständiger Induktion weisen wir nun nach, dass

$$\det(\lambda I - A_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Den Induktionsanfang haben wir oben bereits gesehen. Nehmen wir nun an, dass unsere Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, so folgt

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A_{n+1}) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Add. } n\text{te Zeile} \\ \text{auf } (n+1)\text{te Zeile}}}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \lambda + a_{n-1} & \lambda + a_n - 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ (n+1)\text{ter Spalte}}}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} + (\lambda + a_n - 1) \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \det(\lambda I - A_n) + (\lambda + a_n - 1)\lambda^n \overset{\text{(IV)}}{=} \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 + \lambda^{n+1} + \lambda^n a_n - \lambda^n \\
&= \lambda^{n+1} + a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 24 **a)** Aus der ersten Gleichung erhalten wir $u'' = u' + v'$ und $v = u' - u$. Setzen wir nun die zweite Gleichung ein, so erhalten wir

$$u'' = u' + u - v = u' + u - (u' - u) = 2u \iff u'' - 2u = 0.$$

Diese lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Die allgemeine Lösung für u lautet also

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für v folgt dann

$$v(x) = u'(x) - u(x) = (\sqrt{2} - 1)c_1 e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2} + 1)c_2 e^{-\sqrt{2}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun die Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir

$$u(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 1, \quad v(0) = (\sqrt{2} - 1)c_1 - (\sqrt{2} + 1)c_2 \overset{!}{=} 0 \iff c_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \quad c_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Als Lösung erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
u(x) &= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}x} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}x} = \cosh(\sqrt{2}x) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}x), \\
v(x) &= \tfrac{1}{4}\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}x).
\end{aligned}$$

b) Aus der ersten Gleichung folgt $u'' = 3u' + 3v' + 1$ sowie $v = \frac{1}{3}u' - u - \frac{1}{3}x$. Einsetzen der zweiten Gleichung liefert dann

$$u'' = 3u' - 3u - 3v + 4 = 3u' - 3u - u' + 3u + x + 4 = 2u' + x + 4 \iff u'' - 2u' = x + 4.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Für die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung erhalten wir mit dem Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$, das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$, d.h.

$$u_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die spezielle Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Die Inhomogenität ist ein Polynom 1. Grades (multipliziert mit $e^{0\cdot x}$) und 0 ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, also machen wir den Ansatz

$$u_p(x) = ax^2 + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir dies ein, so folgt

$$u_p''(x) - 2u_p'(x) = 2a - 4ax - 2b \overset{!}{=} x + 4 \iff a = -\tfrac{1}{4},\ b = -\tfrac{9}{4}.$$

Für u erhalten wir also die allgemeine Lösung

$$u(x) = -\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{9}{4}x + c_1 e^{2x} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für v folgt dann

$$v(x) = \tfrac{1}{3}u'(x) - u(x) - \tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{7}{4}x - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3}c_1 e^{2x} - c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangswerte liefern

$$u(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0, \quad v(0) = -\tfrac{1}{3}c_1 - \tfrac{3}{4} - c_2 \overset{!}{=} 0 \iff c_1 = \tfrac{9}{8}, \quad c_2 = -\tfrac{9}{8},$$

und dies führt auf die Lösung

$$\begin{aligned} u(x) &= \tfrac{9}{8}e^{2x} - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{9}{4}x - \tfrac{9}{8}, \\ v(x) &= -\tfrac{3}{8}e^{2x} + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{7}{4}x + \tfrac{3}{8}. \end{aligned}$$

c) Hier betrachten wir zunächst nur die erste und die dritte Gleichung. Aus der ersten erhalten wir $u'' = 7u' + 4w'$ und $w = \frac{1}{4}u' - \frac{7}{4}u$. Einsetzen führt uns auf

$$u'' = 7u' - 32u - 20w = 7u' - 32u - 5u' + 35u = 2u' + 3u \iff u'' - 2u' - 3u = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser homogenen Differentialgleichug mit konstanten Koeffizienten ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Die allgemeine Lösung für u ist damit gegeben durch

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für w erhalten wir dann

$$w(x) = \tfrac{1}{4}u'(x) - \tfrac{7}{4}u(x) = -2c_1 e^{-x} - c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nun haben wir zwei Funktionen mit zwei Unbekannten und zwei Anfangsbedingungen. Also können wir c_1 und c_2 berechnen und uns insbesondere bei der Berechnung von v etwas Schreibarbeit ersparen. Die Anfangsbedingung liefert

$$u(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 1, \quad w(0) = -2c_1 - c_2 \overset{!}{=} 1 \iff c_1 = -2, \quad c_2 = 3.$$

Für u und w erhalten wir dann als Lösung

$$u(x) = -2e^{-x} + 3e^{3x}, \qquad w(x) = 4e^{-x} - 3e^{3x}.$$

Damit folgt

$$v' = 8u + 3v + 8w = 3v + 16e^{-x}.$$

Dies ist eine inhomogenen lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten). Die Lösung hiervon ist

$$v(x) = ce^{3x} - 4e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Anfangsbedingung für v erhalten wir dann $v(0) = c - 4 \overset{!}{=} 1$, also $c = 5$. Die Lösung ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x) &= -2e^{-x} + 3e^{3x}, \\ v(x) &= -4e^{-x} + 5e^{3x}, \\ w(x) &= 4e^{-x} - 3e^{3x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 25 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} B' &= -(\alpha+\beta)B + \gamma G, \\ G' &= \beta B - \gamma G. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $B'' = -(\alpha+\beta)B' + \gamma G'$ und $G = \frac{1}{\gamma}B' + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}B$. Setzen wir nun die zweite Gleichung ein, so führt das auf

$$B'' = -(\alpha+\beta)B' + \gamma\beta B - \gamma^2 G = -(\alpha+\beta)B' + \gamma\beta B - \gamma B' - \gamma(\alpha+\beta)B = -(\alpha+\beta+\gamma)B' - \alpha\gamma B$$

bzw.

$$B'' + (\alpha+\beta+\gamma)B' + \alpha\gamma B = 0.$$

Diese homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha+\beta+\gamma)\lambda + \alpha\gamma$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} := -\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)^2 - \alpha\gamma}.$$

Wegen $(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha-\gamma)^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma > 0$ sind λ_1 und λ_2 reell, negativ und nicht identisch. Damit haben wir für B die allgemeine Lösung

$$B(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für G erhalten wir dann nach kurzer Rechnung

$$G(t) = \tfrac{1}{\gamma}B'(t) + \tfrac{\alpha+\beta}{\gamma}B(t) = c_1 \tfrac{\alpha+\beta+\lambda_1}{\gamma} e^{\lambda_1 t} + c_2 \tfrac{\alpha+\beta+\lambda_2}{\gamma} e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun die Anfangsbedingung ein, so folgt

$$B(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} B_0, \quad G(0) = c_1 \tfrac{\alpha+\beta+\lambda_1}{\gamma} + c_2 \tfrac{\alpha+\beta+\lambda_2}{\gamma} \overset{!}{=} G_0 \iff c_1 = -\tfrac{(\alpha+\beta+\lambda_2)B_0 - \gamma G_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \tfrac{(\alpha+\beta+\lambda_1)B_0 - \gamma G_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Als Lösung erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} B(t) &= -\tfrac{(\alpha+\beta+\lambda_2)B_0 - \gamma G_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \tfrac{(\alpha+\beta+\lambda_1)B_0 - \gamma G_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ G(t) &= -\tfrac{(\alpha+\beta+\lambda_2)B_0 - \gamma G_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \tfrac{\alpha+\beta+\lambda_1}{\gamma} e^{\lambda_1 t} + \tfrac{(\alpha+\beta+\lambda_1)B_0 - \gamma G_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \tfrac{\alpha+\beta+\lambda_2}{\gamma} e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$