Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt, WS 2012/2013

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 26 **a)** Hier gilt $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 24 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = 2A$. Somit ist $A^3 = A^2 A = 2AA = 2^2 A$ und induktiv folgt $A^k = 2^{k-1} A$ für $k \in \mathbb{N}$ (beachte, dass die Aussage für $k = 0$ falsch ist!). Damit folgt für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} t^k A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k!} t^k A^k = I + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k!} t^k 2^k A \\ &= I - \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} (2t)^k A = I - \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} e^{2t} A = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{2t} & -6 + 6e^{2t} \\ 1 - e^{2t} & -2 + 3e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Definieren wir $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, so haben wir $A = I + B$; und wegen $B \cdot I = I \cdot B$, gilt somit

$$e^{tA} = e^{t(I+B)} = e^{tI} e^{tB}.$$

Außerdem ist $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit auch $B^k = 0$ für $k \geq 3$. Dies liefert

$$e^{tB} = I + tB + \frac{1}{2} t^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 3t + 2t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten schließlich

$$e^{tA} = e^{tI} e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 3t + 2t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & e^t & 0 \\ (3t + 2t^2)e^t & 2te^t & e^t \end{pmatrix}.$$

c) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Das zugehörige charakteristische Polynom berechnen wir mit der Regel von Sarrus und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} &= (3 - \lambda)^2 (4 - \lambda) + 2 + 2 - (4 - \lambda) - 2(3 - \lambda) - 2(3 - \lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 6). \end{aligned}$$

Also haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ (mit Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = 6$ (mit Vielfachheit 1). Als Eigenräume erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(A - 2I) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \operatorname{Kern}(A - 6I) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Also ist A diagonalisierbar und mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} =: D.$$

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung folgt nun

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{tSDS^{-1}} = Se^{tD}S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{6t} & -e^{2t} + e^{6t} & -e^{2t} + e^{6t} \\ -2e^{2t} + 2e^{6t} & 2e^{2t} + 2e^{6t} & -2e^{2t} + 2e^{6t} \\ -e^{2t} + e^{6t} & -e^{2t} + e^{6t} & 3e^{2t} + e^{6t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 27 **a)** Definieren wir $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $A = 2I + B$. Außerdem haben wir $B^2 = 0$ und somit auch $B^k = 0$ für $k \geq 2$. Wegen $(2I)B = B(2I)$ folgt

$$e^{tA} = e^{2tI}e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

b) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ergibt sich mit der Regel von Sarrus zu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(1-\lambda)^2 - 1 + 2 - 2(1-\lambda) - (1-\lambda) - \lambda \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

D.h. die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(A - I) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathrm{Kern}(A + I) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathrm{Kern}(A - 2I) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist A diagonalisierbar und mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$.

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
e^{tA} = e^{tSDS^{-1}} = Se^{tD}S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t - e^{-t} + 4e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{-t} & 6e^{2t} & -3e^t + 3e^{-t} \\ 3e^t - 5e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t + 5e^{-t} + 4e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Als Lösung erhalten wir dann

$$
\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}(0) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t - e^{-t} + 4e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{-t} & 6e^{2t} & -3e^t + 3e^{-t} \\ 3e^t - 5e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t + 5e^{-t} + 4e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{2t} \\ -e^t \\ -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 28 **a)** Setzen wir $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so hat A offensichtlich die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 1$ mit den Eigenräumen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Kern}(A - 4I) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}, \\
\operatorname{Kern}(A - I) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\Big\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Ein Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$
\Big\{ \vec{\phi}_1(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Big\}.
$$

Definieren wir $\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 2e^t \\ 0 & -3e^t \end{pmatrix}$, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$
\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c} = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
$$

b) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$
\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -5 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13
$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1/2} = 2 \pm 3i$. Der Eigenraum des komplexen Eigenwertes λ_1 ist gegeben durch

$$
\operatorname{Kern}\big(A - (2 + 3i)I\big) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 - 3i & 2 \\ -5 & -1 - 3i \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\Big\{ \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ -5 \end{pmatrix} \Big\}.
$$

Eine komplexe Lösung ist damit

$$
\begin{aligned}
e^{(2+3i)t} \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ -5 \end{pmatrix} &= e^{2t}\big(\cos(3t) + i\sin(3t)\big) \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) \\ -5\cos(3t) \end{pmatrix} + ie^{2t} \begin{pmatrix} \sin(3t) + 3\cos(3t) \\ -5\sin(3t) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

und die Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert schließlich das Fundamentalsystem

$$
\Big\{ \vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t) \\ -5e^{2t}\cos(3t) \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t) \\ -5e^{2t}\sin(3t) \end{pmatrix} \Big\}
$$

bzw. die allgemeine Lösung $\vec{y}(t) = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lautet das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^3,$$

d.h. wir haben den 3-fachen Eigenwert $\lambda = 1$. Der zugehörigen Eigenraum ist

$$\operatorname{Kern}(A - I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

der eindimensional ist und uns die Lösung

$$\vec{\phi}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefert. Wir ergänzen nun die Basisvektoren aus dem Eigenraum mit Hauptvektoren. Dafür bestimmen wir

$$\operatorname{Kern}(A - I)^2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

wodurch wir eine weitere Lösung erhalten, indem wir einen Vektor wählen, der nicht im Eigenraum liegt. Hier ist z.B.

$$\vec{\phi}_2(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$$

eine weitere Lösung. Schließlich bestimmen wir

$$\operatorname{Kern}(A - I)^3 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

und erhalten als dritte Lösung

$$\vec{\phi}_3(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} t^2 (A - I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t+t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch $\vec{y}(t) = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + c_3\vec{\phi}_3(t)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 29 Wir berechnen zunächst ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, wobei wir $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gesetzt haben. Die Eigenwerte von A sind offensichtlich $\lambda_1 = 1$ (mit Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 3$ (mit Vielfachheit 2). Der Eigenraum zu λ_1 ist

$$\operatorname{Kern}(A - I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

d.h. die erste Fundamentallösung ist

$$\vec{\phi}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu λ_2 ist gegeben durch

$$\operatorname{Kern}(A-3I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

welcher eindimensional ist daher zunächst nur eine weitere Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert. Weiter ist

$$\operatorname{Kern}(A-3I)^2 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und wir erhalten als dritte Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A-3I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \vec{\phi}_3(t) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit

$$\vec{y}_{\text{hom}}(t) = \Phi(t)\vec{c} = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + c_3\vec{\phi}_3(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung $\vec{y}_p$ der inhomogenen Gleichung lässt sich nun mit Variation der Konstanten bestimmen. Nach Vorlesung gilt

$$\vec{y}_{\text{p}}(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Mit

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} \vec{y}_{\text{p}}(t) &= \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} se^{-s} \\ 3se^{-3s} - s \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \Phi(t)\begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} + 1 \\ -te^{-3t} - \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t - 1 + e^t \\ -t - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t^2e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_{\text{p}}(t) + \vec{y}_{\text{hom}}(t) = \begin{pmatrix} -t - 1 + e^t \\ -t - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t^2e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0.$$

Und als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -t - 1 + 2e^t \\ -t - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t^2e^{3t} + \frac{7}{3}e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30 Nach den Kirchhoff'schen Regeln gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + L_2 I_1' &= U, \\ R_3 I_3 + L_3 I_3' - R_2 I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite und Umformen der zweiten und dritten nach I_2' bzw. nach I_3' liefert

$$\begin{aligned} I_2' &= \frac{U}{L_2} - \Big(\frac{R_1}{L_2} + \frac{R_2}{L_2} + \frac{R_2}{L_3}\Big) I_2 + \Big(\frac{R_3}{L_3} - \frac{R_1}{L_2}\Big) I_3, \\ I_3' &= \frac{R_2}{L_3} I_2 - \frac{R_3}{L_3} I_3. \end{aligned}$$

Setzen wir nun die gegebenen Größen ein, so erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} I_2' &= -3I_2 + \sin(t), \qquad I_2(0) = 0, \\ I_3' &= I_2 - I_3, \qquad I_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Eine einfache Methode, dieses System zu lösen, wäre wohl die Eliminationsmethode anzuwenden. Die Eigenwertmethode ist hier ein wenig aufwändiger, wie wir im Folgenden sehen werden. Die zum obigen System gehörige Matrix ist $A := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -1$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(A + 3I) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\Big\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\Big\}, \\ \mathrm{Kern}(A + I) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\Big\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big\}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & 0 \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten, wollen wir nun noch die 'Variation der Konstanten'-Formel anwenden. Mit

$$\Phi(s)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3s} & 0 \\ e^{s} & 2e^{s} \end{pmatrix}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \vec{I}_{\mathrm{p}}(t) &= \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3s} \sin(s) \\ e^{s} \sin(s) \end{pmatrix} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2} \Phi(t) \begin{pmatrix} \big[\frac{1}{10} e^{3s}\big(3\sin(s) - \cos(s)\big)\big]_0^t \\ \big[\frac{1}{2} e^{s}\big(\sin(s) - \cos(s)\big)\big]_0^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} e^{3t}\big(3\sin(t) - \cos(t)\big) + \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} e^{t}\big(\sin(t) - \cos(t)\big) + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} e^{-3t} + \frac{3}{10}\sin(t) - \frac{1}{10}\cos(t) \\ \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{20} e^{-3t} + \frac{1}{10}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies führt auf die Lösung

$$\vec{I}(t) = \begin{pmatrix} I_2(t) \\ I_3(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{I}_{\mathrm{p}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} e^{-3t} + \frac{3}{10}\sin(t) - \frac{1}{10}\cos(t) \\ \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{20} e^{-3t} + \frac{1}{10}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t) \end{pmatrix},$$

sowie $I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) = \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{20} e^{-3t} + \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{3}{10}\cos(t)$.