KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2012/2013
Institut für Analysis 17.01.2013
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Markus Antoni

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 31

Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} t\partial_t u(x,t) + \tfrac{t}{xu(x,t)}\partial_x u(x,t) + u(x,t) &= 0, \qquad x,t > 0,\\ u(\xi,\xi^2) &= 1, \qquad \xi > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 32

Wir betrachten die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u(x,t) + x^2\partial_x u(x,t) + 2xu(x,t) = 0, \qquad x,t > 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin x, \qquad x > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren.

Aufgabe 33

Die Funktionen $u_{\mathrm{2D}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $u_{\mathrm{3D}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar, und die Funktionen v_{2D} und v_{3D} seien definiert durch

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{2D}}(r,\varphi) &:= u_{\mathrm{2D}}(r\cos\varphi, r\sin\varphi),\\ v_{\mathrm{3D}}(r,\varphi,\theta) &:= u_{\mathrm{3D}}(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned}$$

Zeigen Sie folgende Darstellungen des Laplace-Operators:

a) für $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:

$$\Delta u_{\mathrm{2D}}(x,y) = \partial_{rr}v_{\mathrm{2D}}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r}\partial_r v_{\mathrm{2D}}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}v_{\mathrm{2D}}(r,\varphi);$$

b) für $(x,y,z) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$\begin{aligned} \Delta u_{\mathrm{3D}}(x,y,z) = {} & \tfrac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2\,\partial_r v_{\mathrm{3D}}(r,\varphi,\theta)\big) + \tfrac{1}{r^2\cos^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}v_{\mathrm{3D}}(r,\varphi,\theta)\\ & + \tfrac{1}{r^2\cos\theta}\partial_\theta\big(\cos\theta\,\partial_\theta v_{\mathrm{3D}}(r,\varphi,\theta)\big). \end{aligned}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 34

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Gleichung

$$\Delta u(\vec{x}) = -1, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 35

Wir betrachten ein Verkehrssystem. Dabei bezeichnen wir mit $\varrho(x,t)$ die Anzahl der Fahrzeuge pro Längeneinheit am Ort x und zur Zeit t, d.h. die Dichte der Fahrzeuge. Mit $q(x,t)$ bezeichnen wir die Anzahl der Fahrzeuge pro Zeiteinheit am Ort x und zur Zeit t, was dem Fluss der Fahrzeuge entspricht.

a) Zeigen Sie das Erhaltungsgesetz

$$\partial_t \varrho(x,t) + \partial_x q(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

b) Die Geschwindigkeit der Fahrzeuge modellieren wir als

$$v(x,t) = v_{\max}\Big(1 - \frac{\varrho(x,t)}{\varrho_{\max}}\Big),$$

wobei $v_{\max}$ die Maximalgeschwindigkeit ist und $\varrho_{\max}$ die maximale Fahrzeugdichte bezeichnet, bei der der Verkehr zum Erliegen kommt. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = v(x,t) - v_{\max}\frac{\varrho(x,t)}{\varrho_{\max}} = v_{\max}\Big(1 - \frac{2\varrho(x,t)}{\varrho_{\max}}\Big)$$

eine Lösung der Burger-Gleichung

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

ist.

c) Finden Sie unter Verwendung des Charakteristikenverfahrens eine Lösung der Burger-Gleichung für $0 < t < 1$ und mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \leqslant 0, \\ 1 - x, & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{für } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Hinweise zur Übungsklausur

Die Übungsklausur zur HM III findet am Samstag, den 26.01.2013, von 11:00 - 13:00 Uhr im **Daimler-Hörsaal** statt. Zur Teilnahme ist keine Anmeldung erforderlich.

Zugelassene Hilfsmittel zur HM III - Übungsklausur:
Ausschließlich drei handbeschriebene DIN A4 - Blätter (insgesamt sechs Seiten).