Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt, WS 2012/2013

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 31 Hier liegt eine quasilineare Differentialgleichung der Form

$$\vec{a}(x,t,u)\cdot\nabla u = b(x,t,u) \qquad (x,t)\in D,$$

für $u = u(x,t)$ vor, mit

$$\vec{a}(x,t,u) = \begin{pmatrix} \frac{t}{xu} \\ t \end{pmatrix}, \quad b(x,t,u) = -u, \quad \text{und} \quad D := \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x>0, t>0\}.$$

Eine Parametrisierung von $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$, also der Ansatz $\vec{k}(s) := \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ und $w(s) := u(\vec{k}(s))$, führt dann gemäß Vorlesung auf das charakteristische System

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= \frac{k_2(s)}{k_1(s)w(s)}, \\ k_2'(s) &= k_2(s), \\ w'(s) &= -w(s). \end{aligned}$$

Für jedes feste $\xi > 0$ wählen wir als Anfangsbedingung die Werte

$$k_1(0) = \xi, \qquad k_2(0) = \xi^2, \qquad w(0) = 1,$$

da auf der Kurve $\Gamma := \big\{(\xi,\xi^2), \xi > 0\big\}$ die Anfangswerte vorgegeben sind. Damit erhalten wir zunächst

$$k_2(s) = c_2 e^s, \quad c_2 \in \mathbb{R},$$

und $k_2(0) = \xi^2$ liefert,

$$k_2(s) = \xi^2 e^s.$$

Für w folgt

$$w(s) = c_3 e^{-s}, \quad c_3 \in \mathbb{R},$$

sowie $w(0) = c_3 \stackrel{!}{=} 1$, d.h. es ist

$$w(s) = e^{-s}.$$

Setzen wir dies in die erste Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$k_1'(s) = \xi^2 e^{2s}\frac{1}{k_1(s)},$$

welches wir mit Trennung der Variablen lösen können. Hier finden wir (beachte $k_1(s) = x > 0$)

$$k_1(s) = \sqrt{\xi^2 e^{2s} + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

sowie $k_1(0) = \sqrt{\xi^2 + c_1} \stackrel{!}{=} \xi \iff c_1 = 0$, d.h.

$$k_1(s) = \xi e^s.$$

Damit sind die Grundcharakteristiken gegeben durch

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi^2 e^s \end{pmatrix},$$

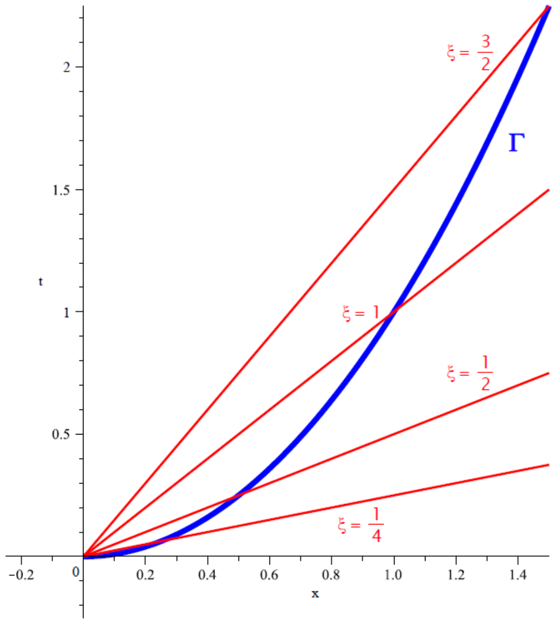
und es gilt

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \iff \xi e^s = x,\ \xi^2 e^s = t \iff \xi = x e^{-s},\ e^s = \frac{t}{\xi^2} \iff \xi = \frac{t}{x},\ s = \ln\big(\tfrac{x^2}{t}\big)$$

So weit hätten wir hier aber eigentlich gar nicht umformen brauchen, da wir lediglich $e^{-s} = \frac{t}{x^2}$ benötigen. Damit erhalten wir nämlich die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = e^{-s} = \frac{t}{x^2}, \quad (x,t) \in D.$$

Anmerkung: Für die Grundcharakteristiken gilt hier (wenn wir s eliminieren) $t = \xi^2 e^s = \xi x$. Halten wir also ξ fest, so entsprechen die Grundcharakteristiken in der (x,t)-Ebene Geraden mit Steigung ξ. Siehe Skizze:



Aufgabe 32 Das charakteristische System dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s)^2, \\ k_2'(s) &= 1, \\ w'(s) &= -2k_1(s)w(s), \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$k_1(0) = \xi, \quad k_2(0) = 0, \quad w(0) = \sin(\xi)$$

für $\xi > 0$. Mit Trennung der Variablen erhalten wir für die erste Gleichung die allgemeine Lösung

$$k_1(s) = -\frac{1}{s + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Der Anfangswert liefert $k_1(0) = -\frac{1}{c_1} \stackrel{!}{=} \xi \iff c_1 = -\frac{1}{\xi}$, und somit

$$k_1(s) = -\frac{1}{s - \frac{1}{\xi}} = \frac{\xi}{1 - s\xi}.$$

Für k_2 erhalten wir als allgemeine Lösung $k_2(s) = s + c_2$ und aus dem Anfangswert folgt $c_2 = 0$. D.h.

$$k_2(s) = s.$$

Die letzte Gleichung ergibt sich nun nach Einsetzen zu

$$w'(s) = \frac{2\xi}{s\xi - 1} w(s),$$

welche die allgemeine Lösung $w(s) = c_3(s\xi - 1)^2$ besitzt. Hier gilt nun $w(0) = c_3 \stackrel{!}{=} \sin(\xi)$, also erhalten wir

$$w(s) = \sin(\xi)(s\xi - 1)^2.$$

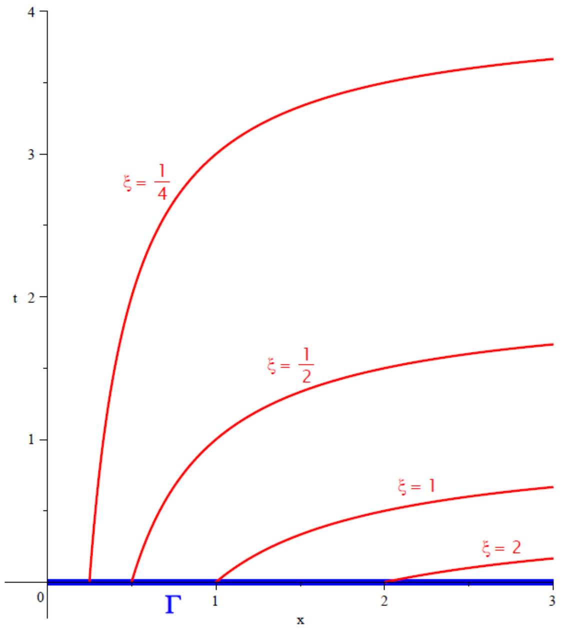
Für die Grundcharakteristiken gilt dann

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{1-s\xi} \\ s \end{pmatrix} \iff x = \frac{\xi}{1-s\xi},\ t = s \iff \xi = \frac{x}{1+tx},\ s = t.$$

Eisetzen in w, liefert dann die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = \sin\left(\tfrac{x}{1+tx}\right)\left(\tfrac{tx}{1+tx} - 1\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{1+tx}\right)}{(1+tx)^2}.$$

Anmerkung: Die Elimination von s in den Grundcharakteristiken liefert hier den Zusammenhang $t = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi}$ für jedes feste $\xi > 0$. Für ausgewählte ξ erhalten wir dann in der (x,t)-Ebene das folgende Schaubild:



Aufgabe 33 **a)** Für $v_{2\mathrm{D}}$ und $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial_r v_{2\mathrm{D}}(r,\varphi) &= (\partial_x u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + (\partial_y u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi \\
&= \partial_x u_{2\mathrm{D}}(x,y)\cos\varphi + \partial_y u_{2\mathrm{D}}(x,y)\sin\varphi, \\
\partial_{rr} v_{2\mathrm{D}}(r,\varphi) &= (\partial_{xx} u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos^2\varphi + 2(\partial_{xy} u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi\sin\varphi \\
&\quad + (\partial_{yy} u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin^2\varphi \\
&= \partial_{xx} u_{2\mathrm{D}}(x,y)\cos^2\varphi + 2\partial_{xy} u_{2\mathrm{D}}(x,y)\cos\varphi\sin\varphi + \partial_{yy} u_{2\mathrm{D}}(x,y)\sin^2\varphi,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi v_{2\mathrm{D}}(r,\varphi) &= -(\partial_x u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\sin\varphi + (\partial_y u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi \\
&= -\partial_x u_{2\mathrm{D}}(x,y)\, r\sin\varphi + \partial_y u_{2\mathrm{D}}(x,y)\, r\cos\varphi, \\
\partial_{\varphi\varphi} v_{2\mathrm{D}}(r,\varphi) &= (\partial_{xx} u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2\sin^2\varphi - 2(\partial_{xy} u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\sin\varphi \\
&\quad + (\partial_{yy} u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2\cos^2\varphi - (\partial_x u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi \\
&\quad - (\partial_x u_{2\mathrm{D}})(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\sin\varphi \\
&= \partial_{xx} u_{2\mathrm{D}}(x,y)\, r^2\sin^2\varphi - 2\partial_{xy} u_{2\mathrm{D}}(x,y)\, r^2\cos\varphi\sin\varphi + \partial_{yy} u_{2\mathrm{D}}(x,y)\, r^2\cos^2\varphi \\
&\quad - \partial_x u_{2\mathrm{D}}(x,y)\, r\cos\varphi - \partial_y u_{2\mathrm{D}}(x,y)\, r\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
&\partial_{rr}v_{\mathrm{2D}}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r}\partial_r v_{\mathrm{2D}}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}v_{\mathrm{2D}}(r,\varphi)\\
&= \partial_{xx}u_{\mathrm{2D}}(x,y)\cos^2\varphi + 2\partial_{xy}u_{\mathrm{2D}}(x,y)\cos\varphi\sin\varphi + \partial_{yy}u_{\mathrm{2D}}(x,y)\sin^2\varphi\\
&\quad + \partial_x u_{\mathrm{2D}}(x,y)\tfrac{1}{r}\cos\varphi + \partial_y u_{\mathrm{2D}}(x,y)\tfrac{1}{r}\sin\varphi\\
&\quad + \partial_{xx}u_{\mathrm{2D}}(x,y)\sin^2\varphi - 2\partial_{xy}u_{\mathrm{2D}}(x,y)\cos\varphi\sin\varphi + \partial_{yy}u_{\mathrm{2D}}(x,y)\cos^2\varphi\\
&\quad - \partial_x u_{\mathrm{2D}}(x,y)\tfrac{1}{r}\cos\varphi - \partial_y u_{\mathrm{2D}}(x,y)\tfrac{1}{r}\sin\varphi\\
&= \partial_{xx}u_{\mathrm{2D}}(x,y)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \partial_{yy}u_{\mathrm{2D}}(x,y)(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = \partial_{xx}u_{\mathrm{2D}}(x,y) + \partial_{yy}u_{\mathrm{2D}}(x,y)\\
&= \Delta u_{\mathrm{2D}}(x,y).
\end{aligned}
$$

b) Für v_{3D} gehen wir nun genauso vor. Um den Überblick nicht zu verlieren werden wir im Folgenden die Argumente (r,φ,θ) bzw. $(x,y,z) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$ von v_{3D} bzw. u_{3D} weglassen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\partial_r v_{\mathrm{3D}} &= \partial_x u_{\mathrm{3D}}\cos\varphi\cos\theta + \partial_y u_{\mathrm{3D}}\sin\varphi\cos\theta + \partial_z u_{\mathrm{3D}}\sin\theta,\\
\partial_{rr} v_{\mathrm{3D}} &= \partial_{xx}u_{\mathrm{3D}}\cos^2\varphi\cos^2\theta + \partial_{yy}u_{\mathrm{3D}}\sin^2\varphi\cos^2\theta + \partial_{zz}u_{\mathrm{3D}}\sin^2\theta\\
&\quad + 2\partial_{xy}u_{\mathrm{3D}}\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + 2\partial_{xz}u_{\mathrm{3D}}\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 2\partial_{yz}u_{\mathrm{3D}}\sin\varphi\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\partial_\varphi v_{\mathrm{3D}} &= -\partial_x u_{\mathrm{3D}}\, r\sin\varphi\cos\theta + \partial_\varphi u_{\mathrm{3D}}\, r\cos\varphi\cos\theta,\\
\partial_{\varphi\varphi} v_{\mathrm{3D}} &= \partial_{xx}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \partial_{yy}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta - 2\partial_{xy}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta\\
&\quad - \partial_x u_{\mathrm{3D}}\, r\cos\varphi\cos\theta - \partial_y u_{\mathrm{3D}}\, r\sin\varphi\cos\theta,
\end{aligned}
$$

und schließlich noch

$$
\begin{aligned}
\partial_\theta v_{\mathrm{3D}} &= -\partial_x u_{\mathrm{3D}}\, r\cos\varphi\sin\theta - \partial_y u_{\mathrm{3D}}\, r\sin\varphi\sin\theta + \partial_z u_{\mathrm{3D}}\, r\cos\theta,\\
\partial_{\theta\theta} v_{\mathrm{3D}} &= \partial_{xx}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \partial_{yy}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \partial_{zz}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\cos^2\theta\\
&\quad + 2\partial_{xy}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - 2\partial_{xz}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta - 2\partial_{yz}u_{\mathrm{3D}}\, r^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\\
&\quad - \partial_x u_{\mathrm{3D}}\, r\cos\varphi\cos\theta - \partial_y u_{\mathrm{3D}}\, r\sin\varphi\cos\theta - \partial_z u_{\mathrm{3D}}\, r\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Setzen wir dies nun ein uns und fassen die passenden Ausdrücke zusammen, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2\,\partial_r v_{\mathrm{3D}}) + \tfrac{1}{r^2\cos^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}v_{\mathrm{3D}} + \tfrac{1}{r^2\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\,\partial_\theta v_{\mathrm{3D}})\\
&= \tfrac{2}{r}\partial_r v_{\mathrm{3D}} + \partial_{rr}v_{\mathrm{3D}} + \tfrac{1}{r^2\cos^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}v_{\mathrm{3D}} - \tfrac{\sin\theta}{r^2\cos\theta}\partial_\theta v_{\mathrm{3D}} + \tfrac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}v_{\mathrm{3D}}\\
&= \big(\tfrac{2}{r}\cos\varphi\cos\theta - \tfrac{\cos\varphi}{r\cos\theta} + \tfrac{\cos\varphi\sin^2\theta}{r\cos\theta} - \tfrac{1}{r}\cos\varphi\cos\theta\big)\partial_x u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(\tfrac{2}{r}\sin\varphi\cos\theta - \tfrac{\sin\varphi}{r\cos\theta} + \tfrac{\sin\varphi\sin^2\theta}{r\cos\theta} - \tfrac{1}{r}\sin\varphi\cos\theta\big)\partial_y u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(\tfrac{2}{r}\sin\theta - \tfrac{1}{r}\sin\theta - \tfrac{1}{r}\sin\theta\big)\partial_z u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta - 2\sin\varphi\cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\big)\partial_{xy}u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta - 2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\big)\partial_{xz}u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta - 2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\big)\partial_{yz}u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\theta\big)\partial_{xx}u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\theta\big)\partial_{yy}u_{\mathrm{3D}}\\
&\quad + \big(\sin^2\theta + \cos^2\theta\big)\partial_{zz}u_{\mathrm{3D}}.
\end{aligned}
$$

Für den Ausdruck in der ersten Klammer gilt

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{2}{r}\cos\varphi\cos\theta - \tfrac{\cos\varphi}{r\cos\theta} + \tfrac{\cos\varphi\sin^2\theta}{r\cos\theta} - \tfrac{1}{r}\cos\varphi\cos\theta = \tfrac{1}{r}\cos\varphi\cos\theta - \tfrac{\cos\varphi(1-\sin^2\theta)}{r\cos\theta}\\
&\quad = \tfrac{1}{r}\cos\varphi\cos\theta - \tfrac{\cos\varphi\cos^2\theta}{r\cos\theta} = 0,
\end{aligned}
$$

und analog gilt $\frac{2}{r}\sin\varphi\cos\theta - \frac{\sin\varphi}{r\cos\theta} + \frac{\sin\varphi\sin^2\theta}{r\cos\theta} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\theta = 0$. Durch Ausklammern folgt außerdem

$$\begin{aligned}
2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta - 2\sin\varphi\cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta &= 2\sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2\sin\varphi\cos\varphi = 0,\\
\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\theta &= \cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,\\
\sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\theta &= \sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\varphi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\tfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2\,\partial_r v_{\mathrm{3D}}) + \tfrac{1}{r^2\cos^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}v_{\mathrm{3D}} + \tfrac{1}{r^2\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\,\partial_\theta v_{\mathrm{3D}}) = \partial_{xx}u_{\mathrm{3D}} + \partial_{yy}u_{\mathrm{3D}} + \partial_{zz}u_{\mathrm{3D}} = \Delta u_{\mathrm{3D}}.$$

Aufgabe 34 Radialsymmetrische Funktionen sind von der Form

$$u(\vec{x}) = g\big(\|\vec{x}\|\big),$$

mit

$$\begin{aligned}
\partial_j u(\vec{x}) &= g'\big(\|\vec{x}\|\big)\frac{x_j}{\|\vec{x}\|},\\
\partial_{jj} u(\vec{x}) &= g''\big(\|\vec{x}\|\big)\frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^2} + g'\big(\|\vec{x}\|\big)\Big(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^3}\Big).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Delta u(\vec{x}) = g''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}g'\big(\|\vec{x}\|\big).$$

Es reicht hier also zunächst die Gleichung

$$g''(r) + \frac{n-1}{r}g'(r) = -1$$

zu betrachten. Die Substitution $h(r) := g'(r)$ führt dann auf die inhomogenen lineare Differentialgleichung

$$h'(r) = \frac{(1-n)}{r}h(r) - 1,$$

deren zugehörigen homogene Gleichung die allgemeine Lösung

$$h_{\mathrm{hom}}(r) = c_1\exp\Big(\int \frac{1-n}{r}\,\mathrm{d}r\Big) = c_1 r^{1-n}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

besitzt. Eine spezielle Lösung können wir nun mit Variation der Konstanten finden. Der Ansatz $h_{\mathrm{p}}(r) = c(r)r^{1-n}$ führt dann auf die Gleichung

$$c'(r)r^{1-n} = -1 \iff c'(r) = -r^{n-1} \iff c(r) = -\frac{1}{n}r^n \ (+\text{const.})$$

und wir erhalten $h_{\mathrm{p}}(r) = -\frac{1}{n}r$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für h ist somit

$$h(r) = -\frac{1}{n}r + c_1 r^{1-n}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Für g erhalten wir dann

$$g(r) = \int h(r)\,\mathrm{d}r = \begin{cases} -\frac{1}{4}r^2 + c_1\ln r + c_2, & \text{für } n = 2,\\ -\frac{1}{2n}r^2 + c_1\frac{1}{2-n}r^{2-n} + c_2, & \text{für } n \neq 2, \end{cases} \qquad r \neq 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

bzw. die Lösung

$$u(\vec{x}) = g\big(\|\vec{x}\|\big), \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Aufgabe 35 **a)** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, beliebig. Dann befinden sich in dem Interall $[a, b]$ zum Zeitpunkt t

$$N(t) = \int_a^b \rho(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Fahrzeuge. Weiter ist

$$N'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \partial_t \rho(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Außerdem entspricht die zeiliche Änderungsrate im Intervall $[a, b]$ zum Zeitpunkt t gerade der Differenz des Flusses an den Randpunkten, d.h.

$$N'(t) = q(a,t) - q(b,t) = -\int_a^b \partial_x q(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Damit folgt

$$\int_a^b \partial_t \rho(x,t) + \partial_x q(x,t)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, und somit ist auch

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x q(x,t) = 0.$$

b) Es gilt

$$q(x,t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(x,t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}(x,t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(x,t) = \rho(x,t)v(x,t).$$

und somit

$$\begin{aligned}\partial_x q(x,t) &= (\partial_x\rho)(x,t)v(x,t) + \rho(x,t)(\partial_x v)(x,t) = (\partial_x\rho)(x,t)v(x,t) - \rho(x,t)v_{\max}\frac{(\partial_x\rho)(x,t)}{\rho_{\max}} \\ &= (\partial_x\rho)(x,t)\Big(v(x,t) - v_{\max}\frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}}\Big) = (\partial_x\rho)(x,t)u(x,t).\end{aligned}$$

Dies liefert dann

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) &= -2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\partial_t\rho(x,t) - 2u(x,t)\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\partial_x\rho(x,t) \\ &= -2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\big(\partial_t\rho(x,t) + u(x,t)\partial_x\rho(x,t)\big) = -2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\big(\partial_t\rho(x,t) + \partial_x q(x,t)\big) \\ &\overset{\text{a)}}{=} 0.\end{aligned}$$

c) Das charakteristische System dieser Gleichung samt Anfangsbedingungen lautet hier

$$\begin{aligned} &k_1'(s) = w(s), && k_1(0) = \xi, \\ &k_2'(s) = 1, && k_2(0) = 0, \\ &w'(s) = 0, && w(0) = \left\{\begin{array}{cl} 1, & \text{für } \xi \le 0, \\ 1-\xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ 0, & \text{für } \xi \ge 1, \end{array}\right\} =: f(\xi). \end{aligned}$$

Als Lösung für k_2 erhalten wir hier

$$k_2(s) = s,$$

und für w erhalten wir die konstante Lösung

$$w(s) = f(\xi).$$

Setzen wir dies nun in die erste Gleichung ein, so erhalten wir hier die Differentialgleichung

$$k_1'(s) = f(\xi),$$

welche die allgemeine Lösung

$$k_1(s) = sf(\xi) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

besitzt. Setzen wir hier noch den Anfangswert ein, so folgt $k_1(0) = c_1 \stackrel{!}{=} \xi$, also

$$k_1(s) = sf(\xi) + \xi = \begin{cases} s + \xi, & \text{für } \xi \leq 0, \\ s - s\xi + \xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ \xi, & \text{für } \xi \geq 1, \end{cases}$$

Damit erhalten wir für $t < 1$

$$\begin{aligned} & \vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ \iff\ & x = \begin{cases} s + \xi, & \text{für } \xi \leq 0, \\ s - s\xi + \xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ \xi, & \text{für } \xi \geq 1, \end{cases} \qquad t = s \\ \iff\ & x = \begin{cases} t + \xi, & \text{für } \xi \leq 0, \\ t + (1-t)\xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ \xi, & \text{für } \xi \geq 1, \end{cases} \qquad s = t \\ \iff\ & \xi = \begin{cases} x - t, & \text{für } x - t \leq 0 \iff x \leq t, \\ \frac{x-t}{1-t}, & \text{für } 0 < \frac{x-t}{1-t} < 1 \iff t < x < 1, \\ x, & \text{für } x \geq 1. \end{cases} \qquad s = t. \end{aligned}$$

Dies führt auf die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{für } x \leq t, \\ 1 - \frac{x-t}{1-t}, & \text{für } t < x < 1, \\ 0, & \text{für } x \geq 1, \end{array} \right\} = \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{für } t < x < 1, \\ 0, & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{für } t < 1.$$