KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Markus Antoni

WS 2012/2013
31.01.2013

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 36

Auf dem Kreisring $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$ betrachten wir das Dirichletsche Problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x,y) &= 1 + 3x + 8xy \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 1 + 2\ln 2 + 3x + \tfrac{1}{2}xy \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Rechnen Sie das System zunächst in Polarkoordinaten um und lösen Sie es anschließend mit einem Separationsansatz.

Aufgabe 37

Die Telegraphengleichung

$$\partial_{tt} u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) + 2\partial_t u(x,t) + u(x,t) = 0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist nun die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$ für $t \geqslant 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Zeigen Sie, dass ein Separationsansatz der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ nicht zu einer Lösung führt.

b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Ansatzes $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 38

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems mit einem Separationsansatz:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) &= 0, \qquad 0 < x < 1, t > 0, \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) &= 0 \qquad \text{für } t > 0, \\ u(x,0) &= \cos(\pi x), \qquad \text{für } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 39

a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung

$$\partial_{tt} u(\vec{x},t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t) = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe des Separationsansatzes $u(\vec{x},t) = e^{ikt} v(\vec{x})$, $k \in \mathbb{R}$, auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

führt.

b) Finden Sie Lösungen zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$v(x_1, 0) = v(x_1, b) = v(0, x_2) = v(a, x_2) = 0$$

für $a, b > 0$, indem Sie einen Separationsansatz benutzen.

Aufgabe 40

Wir betrachten die Einteilchen-Schrödingergleichung ohne Potential, d.h.:

$$i\hbar\, \partial_t u(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $\hbar$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum und m die Masse des Teilchens. Nun wählen wir die Zeit- und Masseeinheit so, dass $\hbar = 1$ und $m = \frac{1}{2}$. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\partial_t u(\vec{x},t) = i\, \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}.$$

Lösen Sie dieses Problem unter Anwendung der Fouriertransformation und mit der Anfangsbedingung

$$u(\vec{x},0) = e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.