Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt, WS 2012/2013

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 36 Für $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $1 < r < 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, folgt nach Aufgabe 33

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= \partial_{rr}v(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi) = 0 \\ \iff &\ r^2\partial_{rr}v(r,\varphi) + r\partial_r v(r,\varphi) + \partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Für die Randbedingungen erhalten wir für $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\begin{aligned} v(r,\varphi) &= 1 + 3r\cos\varphi + 8r^2\cos\varphi\sin\varphi = 1 + 3r\cos\varphi + 4r^2\sin 2\varphi, \quad \text{für } r = 1, \\ v(r,\varphi) &= 1 + 2\ln 2 + 3r\cos\varphi + \frac{1}{2}r^2\cos\varphi\sin\varphi = 1 + 2\ln 2 + 3r\cos\varphi + \frac{1}{4}r^2\sin 2\varphi, \quad \text{für } r = 2. \end{aligned}$$

D.h. für $0 \le \varphi \le 2\pi$ betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &r^2\partial_{rr}v(r,\varphi) + r\partial_r v(r,\varphi) + \partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi) = 0, \quad 1 < r < 2, \\ &v(1,\varphi) = 1 + 3\cos\varphi + 4\sin 2\varphi, \\ &v(2,\varphi) = 1 + 2\ln 2 + 6\cos\varphi + \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Für v machen wir nun den Separationsansatz

$$v(r,\varphi) = g(r)h(\varphi),$$

wobei $g, h \neq 0$ (da sonst die Randbedingungen nicht erfüllt sind) und h eine 2π-periodische Funktion sein soll (da $v(r,0) = v(r,2\pi)$ gelten muss). Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$r^2g''(r)h(\varphi) + rg'(r)h(\varphi) + g(r)h''(\varphi) = 0 \iff \frac{r^2g''(r) + rg'(r)}{g(r)} = -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nun nicht von φ und die rechte nicht von r ab. Da aber beide Seiten für alle r, φ übereinstimmen, hängen beide Ausdrücke weder von r noch von φ ab. D.h. es gibt eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{r^2g''(r) + rg'(r)}{g(r)} &= \lambda \iff r^2g''(r) + rg'(r) - \lambda g(r) = 0, \quad \text{(Euler-Dgl.)} \\ -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} &= \lambda \iff h''(\varphi) = -\lambda h(\varphi). \quad \text{(lineare Dgl. mit konst. Koeff.)} \end{aligned}$$

Wir lösen zunächst die zweite dieser beiden Gleichungen.

Ist $\lambda < 0$, so lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$h(\varphi) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese ist aber nur für $c_1 = c_2 = 0$ 2π-periodisch, und dann wäre $h = 0$. Dies haben wir allerdings wegen der Randbedingungen bereits ausgeschlossen.

Ist $\lambda = 0$, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$h(\varphi) = c_1\varphi + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

und diese Funktion ist nur dann periodisch, falls $c_1 = 0$.

Ist $\lambda > 0$, so lautet die allgemeine Lösung

$$h(\varphi) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\varphi), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

welche genau dann 2π-periodisch ist, falls $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$.

Die zweite Gleichung hat also genau dann eine 2π-periodische Lösung $w \neq 0$, falls $\lambda = n^2$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten dann die Lösungen

$$h_n(\varphi) = a_n \cos(n\varphi) + \widetilde{a}_n \sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_n, \widetilde{a}_n \in \mathbb{R}.$$

Da die Gleichungen durch λ gekoppelt sind, brauchen wir auch bei der ersten Gleichung nur noch die Werte $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, betrachten. Ist $n = 0$, so lautet die allgemeine Lösung der ersten Gleichung

$$g_0(r) = b_0 + \widetilde{b}_0 \ln r, \quad b_0, \widetilde{b}_0 \in \mathbb{R}.$$

Im anderen Fall $n \neq 0$, erhalten wir die Lösung

$$g_n(r) = b_n r^n + \widetilde{b}_n r^{-n}, \quad b_n, \widetilde{b}_n \in \mathbb{R}.$$

D.h. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$v_n(r, \varphi) = g_n(r) h_n(\varphi)$$

eine Lösung. Durch Aufsummieren erhalten wir dann die allgemeine Lösung

$$v(r, \varphi) = c_0 + \widetilde{c}_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + \widetilde{c}_n r^{-n}) \cos(n\varphi) + (d_n r^n + \widetilde{d}_n r^{-n}) \sin(n\varphi), \quad c_n, \widetilde{c}_n, d_n, \widetilde{d}_n \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun die Randbedingungen ein, so folgt

$$\begin{aligned} v(1, \varphi) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \widetilde{c}_n) \cos(n\varphi) + (d_n + \widetilde{d}_n) \sin(n\varphi) \stackrel{!}{=} 1 + 3\cos\varphi + 4 \sin 2\varphi \\ &\iff c_0 = 1,\ c_1 + \widetilde{c}_1 = 3,\ d_2 + \widetilde{d}_2 = 4,\ c_n + \widetilde{c}_n = 0\ (n \neq 1),\ d_n + \widetilde{d}_n = 0\ (n \neq 2), \end{aligned}$$

sowie

$$v(2, \varphi) = 1 + \widetilde{c}_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n 2^n + \widetilde{c}_n \tfrac{1}{2^n}) \cos(n\varphi) + (d_n 2^n + \widetilde{d}_n \tfrac{1}{2^n}) \sin(n\varphi) \stackrel{!}{=} 1 + 2\ln 2 + 6\cos\varphi + \sin 2\varphi$$

$$\iff \widetilde{c}_0 = 2,\ 2c_1 + \tfrac{1}{2}\widetilde{c}_1 = 6,\ 4d_2 + \tfrac{1}{4}\widetilde{d}_2 = 1,\ 2^n c_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{c}_n = 0\ (n \neq 1),\ 2^n d_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{d}_n = 0\ (n \neq 2),$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} c_1 + \widetilde{c}_1 = 3,\ 2c_1 + \tfrac{1}{2}\widetilde{c}_1 = 6 &\iff c_1 = 3,\ \widetilde{c}_1 = 0, \\ d_2 + \widetilde{d}_2 = 4,\ 4d_2 + \tfrac{1}{4}\widetilde{d}_2 = 1 &\iff d_2 = 0,\ \widetilde{d}_2 = 4, \\ c_n + \widetilde{c}_n = 0,\ 2^n c_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{c}_n = 0 &\iff c_n = 0,\ \widetilde{c}_n = 0, \\ d_n + \widetilde{d}_n = 0,\ 2^n d_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{d}_n = 0 &\iff d_n = 0,\ \widetilde{d}_n = 0. \end{aligned}$$

Dies führt uns dann auf die Lösung

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= 1 + 2\ln r + 3r\cos(\varphi) + \frac{4}{r^2}\sin 2\varphi \\ &= 1 + 2\ln r + 3r\cos(\varphi) + \frac{8}{r^4}(r\cos\varphi)(r\sin\varphi), \end{aligned}$$

bzw. auf die Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$u(x, y) = 1 + 2\ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3x + \frac{8xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Aufgabe 37 **a)** Machen wir einen Separationsansatz der Form

$$u(x,t) = v(x)w(t),$$

so können wir wegen der Randbedingung $v = 0$ und $w = 0$ ausschließen (insb. ist auch $v(0) \neq 0$). Außerdem folgt

$$u(0,t) = v(0)w(t) \overset{!}{=} 3\sin(2t) \iff w(t) = \frac{3}{v(0)}\sin(2t).$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \frac{6}{v(0)} v(x)\cos(2t),\\
\partial_{tt} u(x,t) &= -\frac{12}{v(0)} v(x)\sin(2t),\\
\partial_{xx} u(x,t) &= \frac{3}{v(0)} v''(x)\sin(2t),
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) + 2\partial_t u(x,t) + u(x,t)\\
&\quad= -\frac{12}{v(0)}v(x)\sin(2t) - \frac{3}{v(0)}v''(x)\sin(2t) + \frac{12}{v(0)}v(x)\cos(2t) + \frac{3}{v(0)}v(x)\sin(2t)\\
&\quad= \Big(-\frac{9}{v(0)}v(x) - \frac{3}{v(0)}v''(x)\Big)\sin(2t) + \frac{12}{v(0)}v(x)\cos(2t) \overset{!}{=} 0\\
&\iff -\frac{9}{v(0)}v(x) - \frac{3}{v(0)}v''(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{12}{v(0)}v(x) = 0 \iff v = 0,
\end{aligned}$$

was wir anfangs ausgeschlossen haben. Also führt der Separationsansatz hier zu keiner Lösung.

b) Versuchen wir hingegen den Ansatz

$$u(x,t) = u_0 e^{-ax}\sin(2t - bx), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

so folgt mit der Randbedingung zunächst $u_0 = 3$ und die Beschränktheit der Lösung liefert $a \geq 0$. Weiter haben wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= 6e^{-ax}\cos(2t - bx),\\
\partial_{tt} u(x,t) &= -12e^{-ax}\sin(2t - bx),\\
\partial_x u(x,t) &= -3ae^{-ax}\sin(2t - bx) - 3be^{-ax}\cos(2t - bx),\\
\partial_{xx} u(x,t) &= 3(a^2 - b^2)e^{-ax}\sin(2t - bx) + 6abe^{-ax}\cos(2t - bx).
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$\begin{aligned}
&\partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) + 2\partial_t u(x,t) + u(x,t)\\
&\quad= -12e^{-ax}\sin(2t - bx) - 3(a^2 - b^2)e^{-ax}\sin(2t - bx) - 6abe^{-ax}\cos(2t - bx)\\
&\qquad + 12e^{-ax}\cos(2t - bx) + 3e^{-ax}\sin(2t - bx)\\
&\quad= e^{-ax}\Big((3b^2 - 3a^2 - 9)\sin(2t - bx) + (12 - 6ab)\cos(2t - bx)\Big) \overset{!}{=} 0\\
&\iff 3b^2 - 3a^2 - 9 = 0 \quad \text{und} \quad 12 - 6ab = 0,\\
&\overset{a\geq 0}{\iff} a = 1, \quad b = 2.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = 3e^{-x}\sin(2t - 2x).$$

Aufgabe 38 Der Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ mit $v, w \neq 0$ (u erfüllt sonst die Randbedingung nicht), liefert uns

$$v(x)w'(t) - v''(x)w(t) = 0 \iff \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt, sie aber für alle x, t übereinstimmen, hängen beide Ausdrücke weder von x noch von t ab. Also existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda \iff v''(x) = \lambda v(x),$$
$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \lambda \iff w'(t) = \lambda w(t).$$

Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen haben die allgemeinen Lösungen

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{und} \quad w(t) = c_3 e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Hier kann man auch bereits $\lambda = 0$ ausschließen, da sonst $u(x,0) = \cos(\pi x)$ nicht erfüllt sein könnte. Aus den Randbedingungen $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0$ folgt $v'(0) = v'(1) = 0$. Mit

$$v'(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} v'(0) = \sqrt{\lambda}(c_1 - c_2) = 0 &\iff c_1 = c_2, \\ v'(1) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 &\iff e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \\ &\iff 2\sqrt{\lambda} = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\iff \lambda = -\pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen

$$v_n(x) = c_1 e^{\pi i n x} + c_1 e^{-\pi i n x} = 2c_1 \cos(\pi n x), \quad w_n(t) = c_3 e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Aufsummieren liefert die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = \cos(\pi x)$ erhalten wir nach Koeffizientenvergleich $a_1 = 1$ und $a_n = 0$ sonst. Insgesamt führt dies auf die Lösung

$$u(x,t) = \cos(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

Aufgabe 39 **a)** Ist $u(\vec{x},t) = e^{ikt}v(\vec{x})$ für ein $k \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\partial_t u(\vec{x},t) = ike^{ikt}v(\vec{x}), \quad \partial_{tt}u(\vec{x},t) = -k^2 e^{ikt}v(\vec{x}), \quad \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t) = e^{ikt}\Delta v(\vec{x}).$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\partial_{tt}u(\vec{x},t) - \Delta_{\vec{x}}u(\vec{x},t) = -k^2 e^{ikt}v(\vec{x}) - e^{ikt}\Delta v(\vec{x}) \stackrel{!}{=} 0 \iff k^2 v(\vec{x}) + \Delta v(\vec{x}) = 0.$$

b) Machen wir nun den Ansatz

$$v(\vec{x}) = g(x_1)h(x_2)$$

so stellen wir zunächst fest, dass $g = 0$ und $h = 0$ die Lösung $v = 0$ liefern. Nehmen wir im Folgenden nun an, dass $g \neq 0$ und $h \neq 0$ ist, so folgt

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = g''(x_1)h(x_2) + g(x_1)h''(x_2) + k^2 g(x_1)h(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \iff \frac{g''(x_1)}{g(x_1)} = -\frac{h''(x_2)}{h(x_2)} - k^2.$$

Da beide Seiten jeweils nur von einer Variable abhängen, existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{g''(x_1)}{g(x_1)} &= \lambda \iff g''(x_1) = \lambda g(x_1), \\ -\frac{h''(x_2)}{h(x_2)} - k^2 &= \lambda \iff h''(x_2) = -(k^2+\lambda)h(x_2). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} g(x_1) &= c_1 e^{\sqrt{\lambda}x_1} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x_1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ h(x_2) &= c_3 e^{\sqrt{-k^2-\lambda}x_2} + c_4 e^{-\sqrt{-k^2-\lambda}x_2}, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen $v(0,x_2) = v(a,x_2) = 0$ bzw. $v(x_1,0) = v(x_1,b) = 0$ liefern $g(0) = g(a) = 0$ bzw. $h(0) = h(b) = 0$. Setzen wir diese ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} g(0) = c_1 + c_2 &\overset{!}{=} 0 \iff c_2 = -c_1, \\ g(a) = c_1 e^{a\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-a\sqrt{\lambda}} &\overset{!}{=} 0 \iff 2a\sqrt{\lambda} = 2\pi i M, \quad M \in \mathbb{N} \\ &\iff \lambda = -\pi^2 \frac{M^2}{a^2}, \quad M \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h(0) = c_3 + c_4 &\overset{!}{=} 0 \iff c_4 = -c_3, \\ h(b) = c_3 e^{b\sqrt{-k^2-\lambda}} - c_3 e^{-b\sqrt{-k^2-\lambda}} &\overset{!}{=} 0 \iff 2b\sqrt{-k^2-\lambda} = 2\pi i N, \quad N \in \mathbb{N} \\ &\iff -k^2 - \lambda = -\pi^2 \frac{N^2}{b^2}, \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dies führt uns auf

$$\begin{aligned} g_M(x_1) &= c_1 e^{i\pi \frac{M}{a}x_1} - c_1 e^{-i\pi\frac{M}{a}x_1} = a_M \sin\left(\tfrac{\pi M}{a}x_1\right), \\ h_N(x_2) &= c_3 e^{i\pi\frac{N}{b}x_2} - c_3 e^{-i\pi\frac{N}{b}x_2} = b_N \sin\left(\tfrac{\pi N}{b}x_2\right), \end{aligned}$$

für $M, N \in \mathbb{N}$ mit $k^2 = \pi^2 \frac{M^2}{a^2} + \pi^2 \frac{N^2}{b^2}$. Aufsummieren liefert uns dann die allgemeine Lösung

$$v(\vec{x}) = \sum_{M,N} c_{M,N} \sin\left(\tfrac{\pi M}{a}x_1\right) \sin\left(\tfrac{\pi N}{b}x_2\right),$$

wobei die Summe über alle Paare $(M,N) \in \mathbb{N}^2$ läuft mit $k^2 = \pi^2\frac{M^2}{a^2} + \pi^2\frac{N^2}{b^2}$.

Aufgabe 40 Wir wiederholen zunächst ein paar Eigenschaften der Fouriertransformation $\mathscr{F}$ in $\mathbb{R}^n$. Für geeignete Funktionen f definieren wir

$$\mathscr{F}(f)(\vec{\xi}) \equiv \hat{f}(\vec{\xi}) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}, \quad \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gelten u.a. folgende „Rechenregeln“:

1) $\mathscr{F}\big(f(a\,\cdot)\big)(\vec{\xi}) = a^{-n}\mathscr{F}(f)(\tfrac{1}{a}\vec{\xi})$, für $a \neq 0$,
2) $\mathscr{F}\big(f(\cdot - \vec{h})\big)(\vec{\xi}) = e^{-i\vec{h}\cdot\vec{\xi}}\mathscr{F}(f)(\vec{\xi})$, für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$,
3) $\mathscr{F}\big(e^{i\vec{h}\cdot} f\big)(\vec{\xi}) = \mathscr{F}(f)(\vec{\xi} - \vec{h})$, für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$,
4) $\mathscr{F}\big(\partial^\alpha f\big)(\vec{\xi}) = i^{|\alpha|}\vec{\xi}^\alpha \mathscr{F}(f)(\vec{\xi})$,
5) $\mathscr{F}\big(\mathscr{F}f\big)(\vec{x}) = (2\pi)^n f(-\vec{x})$, insb.: ist f gerade, so gilt $\mathscr{F}^2 f = (2\pi)^{-n} f$,
6) Für die Funktion $f(\vec{x}) := e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^2} = e^{-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2}$ gilt $\mathscr{F}(f)(\vec{\xi}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}^2}$.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(\vec{x},t) &= -i\Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t),\\ u(\vec{x},0) &= f(\vec{x}) := e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{x}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2}\end{aligned}$$

und wenden darauf die Fouriertransformation $\mathscr{F}$ an, so folgt für $\hat{u}(\vec{\xi},t) := \mathscr{F}\big(u(\cdot,t)\big)(\vec{\xi})$ und mit der Regel 4)

$$\partial_t \hat{u}(\vec{\xi},t) = ii^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \hat{u}(\vec{\xi},t) = -i\|\vec{\xi}\|^2 \hat{u}(\vec{\xi},t).$$

Halten wir $\vec{\xi}$ fest und definieren wir $y_{\vec{\xi}}(t) := \hat{u}(\vec{\xi},t)$, so steht hier aber nichts anderes als die einfache lineare Differentialgleichung

$$y'_{\vec{\xi}}(t) = -i\|\vec{\xi}\|^2 y_{\vec{\xi}}(t),$$

welches die eindeutige Lösung

$$y_{\vec{\xi}}(t) = y_{\vec{\xi}}(0) e^{-i\|\vec{\xi}\|^2 t}$$

besitzt. Es gilt weiter

$$y_{\vec{\xi}}(0) = \hat{u}(\vec{\xi},0) = \mathscr{F}\big(u(\cdot,0)\big)(\vec{\xi}) = \mathscr{F}(f)(\vec{\xi}) = \hat{f}(\vec{\xi})$$

und Regel 3) und 6) liefern

$$\hat{f}(\vec{\xi}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{\xi}-\vec{\eta}\|^2}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{u}(\vec{\xi},t) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{\xi}-\vec{\eta}\|^2} e^{-i\|\vec{\xi}\|^2 t} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{\xi}-\vec{\eta}\|^2} e^{-it\left(\|\vec{\xi}-\vec{\eta}\|^2 + 2(\vec{\xi}-\vec{\eta})\vec{\eta} + \|\vec{\eta}\|^2\right)}\\ &= \hat{v}(\vec{\xi}-\vec{\eta},t) = \mathscr{F}\big(e^{i\vec{\eta}\cdot} v(\cdot,t)\big)(\vec{\xi})\end{aligned}$$

mit $\hat{v}(\vec{\xi},t) := (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{\xi}\|^2} e^{-it\left(\|\vec{\xi}\|^2 + 2\vec{\xi}\cdot\vec{\eta} + \|\vec{\eta}\|^2\right)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-it\|\vec{\eta}\|^2} e^{-2it\vec{\eta}\cdot\vec{\xi}} e^{-\frac{1}{2}(1+2it)\|\vec{\xi}\|^2}$. Definieren wir nun

$$\hat{w}(\vec{\xi},t) := (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-it\|\vec{\eta}\|^2} e^{-\frac{1}{2}(1+2it)\|\vec{\xi}\|^2}$$

und werfen eine Blick auf Regel 2), so gilt gerade

$$\hat{v}(\vec{\xi},t) = e^{-2it\vec{\eta}\cdot\vec{\xi}} \hat{w}(\vec{\xi},t) = \mathscr{F}\big(w(\cdot - 2t\vec{\eta},t)\big)(\vec{\xi}).$$

Aus der Eindeutigkeit der Fouriertransformation folgt nun zum einen nach Regel 3)

$$u(\vec{x},t) = e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{x}} v(\vec{x},t)$$

sowie

$$v(\vec{x},t) = w(\vec{x} - 2t\vec{\eta},t).$$

Da $\hat{w}$ gerade ist, folgt nach Regel 5): $w(\vec{x},t) = (2\pi)^{-n}\mathscr{F}\big(\hat{w}(\cdot,t)\big)(\vec{x})$. Nach Regel 1) und Regel 6) gilt dann gerade

$$w(\vec{x},t) = e^{-it\|\vec{\eta}\|^2} (1+2it)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\|\vec{x}\|^2}{1+2it}},$$

und somit erhalten wir die Lösung

$$u(\vec{x},t) = e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{x}} w(\vec{x} - 2t\vec{\eta}) = (1+2it)^{-\frac{n}{2}} e^{i(\vec{\eta}\cdot\vec{x} - t\|\vec{\eta}\|^2)} e^{-\frac{1}{2}\frac{\|\vec{x}-2t\vec{\eta}\|^2}{1+2it}}.$$