Ergänzung zum 4. Tutorium: Laguerre'sche Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wird nach dem französischen Mathematiker Edmund Laguerre benannt. Sie tritt u.a. in der Quantentheorie bei der Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom auf.

Zur Lösung dieser Gleichung machen wir einen abgewandelten Potenzreichenansatz, d.h. wir machen den Ansatz

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

mit

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) a_k x^{k+\lambda-1}, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) a_k x^{k+\lambda-2}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} xy'' + (1-x)y' + ny &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) a_k x^{k+\lambda-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) a_k x^{k+\lambda-1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) a_k x^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} n a_k x^{k+\lambda} \\ &= \lambda(\lambda-1) a_0 x^{\lambda-1} + \lambda a_0 x^{\lambda-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1+\lambda)(k+\lambda) a_{k+1} x^{k+\lambda} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1+\lambda) a_{k+1} x^{k+\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda) a_k x^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} n a_k x^{k+\lambda} \\ &= \lambda^2 a_0 x^{\lambda-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+1+\lambda)^2 a_{k+1} + (n-k-\lambda) a_k\big) x^{k+\lambda} \\ &\overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Dies führt uns auf die determinierende Gleichung $\lambda^2 = 0$, d.h. wir haben die zweifache Nullstelle $\lambda = 0$. Nach Vorlesung finden wir daher ein Fundamentalsystem der Form

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k, \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^k.$$

Wir berechnen zunächst y_1. Nach Einsetzen (gleiche Rechnung wie oben mit $\lambda = 0$) und Koeffizientenvergleich sehen wir, dass $c_0 \neq 0$ beliebig gewählt werden kann und wir außerdem die Rekursionsformel

$$c_{k+1} = -\frac{n-k}{(k+1)^2} c_k$$

erhalten. Wählen wir $c_0 := 1$, so folgt

$$c_1 = -\frac{n}{1^2}, \quad c_2 = \frac{(n-1)n}{1^2 2^2}, \quad c_3 = -\frac{(n-2)(n-1)n}{1^2 2^2 3^2}.$$

Wir vermuten daher die explizite Formel

$$\begin{aligned} c_k &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(k!)^2} = \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}, \quad k \leq n. \\ c_k &= 0, \quad k > n, \end{aligned}$$

was wir mit vollständiger Induktion beweisen wollen. Da die zweite Behauptung trivial ist, bleibt noch die erste zu zeigen. Den Induktionsanfang davon haben wir bereits gesehen. Nehmen wir also an, dass die Behauptung für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt (IV), so folgt

$$c_{k+1} = -\frac{n-k}{(k+1)^2} c_k \overset{\text{(IV)}}{=} -\frac{n-k}{(k+1)^2} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(k!)^2} = (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-(k+1))!} \frac{1}{\big((k+1)!\big)^2}.$$

Somit erhalten wir als Lösung das Polynom

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k =: l_n(x),$$

welches auch *Laguerre'sches Polynom* genannt wird. Man beachte allerdings, dass insbesondere in der Physik auch

$$L_n(x) := n!\, l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n}{k} x^k$$

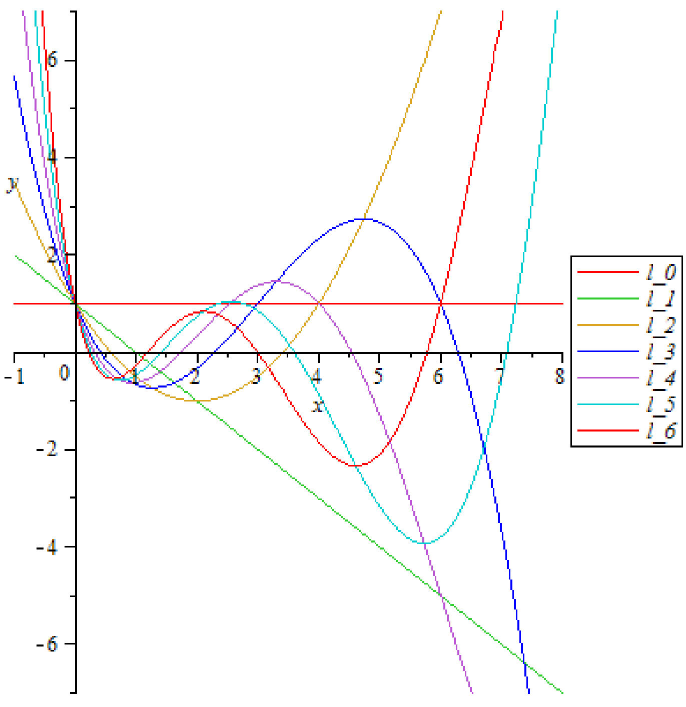
den Namen *Laguerre'sches Polynom* trägt. Der Vollständigkeit halber wollen wir noch die zweite, zu y_1 linear unabhängige Lösung angeben. Nach unerfreulichen Rechnungen erhalten wir hier:

$$y_2(x) = l_n(x) \ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} (\alpha_{n-k} - \alpha_n - 2\alpha_k) x^k + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!n!}{\big((n+k)!\big)^2} x^{n+k},$$

wobei $\alpha_0 := 0$ und $\alpha_k := 1 + \dots + \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Die ersten 7 Laguerre'schen Polynome haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= 1, \\
l_1(x) &= 1 - x, \\
l_2(x) &= 1 - 2x + \tfrac{1}{2}x^2, \\
l_3(x) &= 1 - 3x + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3, \\
l_4(x) &= 1 - 4x + 3x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4, \\
l_5(x) &= 1 - 5x + 5x^2 - \tfrac{5}{3}x^3 + \tfrac{5}{24}x^4 - \tfrac{1}{120}x^5, \\
l_6(x) &= 1 - 6x + \tfrac{15}{2}x^2 - \tfrac{10}{3}x^3 + \tfrac{5}{8}x^4 - \tfrac{1}{20}x^5 + \tfrac{1}{720}x^6.
\end{aligned}$$



In der Literatur begegnet man noch weiteren Polynomen, die mit den Laguerre'schen Polynomen in Verbindung stehen. Bei der Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom treten - je nach Formulierung - die sogenannten *assoziierten* bzw. *zugeordneten* Laguerre'schen Polynome auf.

Die assoziierten Laguerre'sche Polynome $l_n^{(k)}$ / $L_n^{(k)}$: Die Laguerre'schen Polynome erfüllen natürlich die Gleichung $xl_n'' + (1-x)l_n' + nl_n = 0$. Nach Differentiation erhalten wir

$$xl_n''' + (2-x)l_n'' + (n-1)l_n' = 0,$$

d.h. $l_n^{(1)} := l_n'$ erfüllt die Gleichung

$$xy'' + (2-x)y' + (n-1)y = 0.$$

Völlig analog zeigt man nun, dass $l_n^{(k)} := \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} l_n$ (und auch $L_n^{(k)} := \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} L_n$) die *verallgemeinerte Laguerre'sche Differentialgleichung*

$$xy'' + (k+1-x)y' + (n-k)y = 0$$

löst.

Die zugeordneten Laguerre'sche Polynome l_n^k / L_n^k: Von obigen Polynomen ausgehend definiert man nun (man beachte die fehlenden Klammern im Exponenten)

$$l_n^k := (-1)^k \, l_{n+k}^{(k)} \quad \text{und} \quad L_n^k := (-1)^k \frac{n!}{(n+k)!} L_{n+k}^{(k)} = n! \, l_n^k.$$

Diese lösen die Differentialgleichung

$$xy'' + (k+1-x)y' + ny = 0.$$