KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
25.10.213

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die angegebenen Funktionen die Differentialgleichung lösen:

a) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = -\tan(x + c)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x + c) \neq 0$ eine Lösung von $y^2 + y' + 1 = 0$;

b) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $y(x) = -\ln(\cos x + c)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x + c > 0$ eine Lösung von $y' = e^y \sin x$.

Lösung

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ belibig, $D := \{x \in \mathbb{R} : \cos(x + c) \neq 0\}$. Wegen $\cos(x + c) \neq 0 \iff x+c \in (\pi n+\pi/2, \pi(n+1)+\pi/2)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, gibt es zu jedem $x \in D$ ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \in (\pi n+\pi/2-c, \pi(n+1)+\pi/2-c)$. Wir setzen $I := (\pi n+\pi/2-c, \pi(n+1)+\pi/2-c)$ und definieren $y : I \to \mathbb{R}, y(x) := -\tan(x + c)$. Dann ist $y \in C^1(I)$, und es gilt:

$$y'(x) = -\frac{1}{\cos^2(x + c)} \text{ für } x \in I.$$

Wir folgern für $x \in I$:

$$\begin{aligned}
y^2(x) + y'(x) + 1 &= \tan^2(x + c) - \frac{1}{\cos^2(x + c)} + 1 \\
&= \frac{\sin^2(x + c)}{\cos^2(x + c)} - \frac{1}{\cos^2(x + c)} + 1 \\
&= \frac{\sin^2(x + c) - 1 + \cos^2(x + c)}{\cos^2(x + c)} \\
&= \frac{-cos^2(x + c) + \cos^2(x + c)}{\cos^2(x + c)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit ist y eine Lösung von $y^2 + y' + 1 = 0$ auf I.

— bitte wenden —

b) Analog zu a) stellen wir fest, dass es zu jedem x mit $\cos x + c > 0$ ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $x \in I$ und $\cos y + c > 0$ für alle $y \in I$. Wir definieren $y : I \to \mathbb{R}, y(x) := -\ln(\cos x + c)$ und rechnen nach:

$$y'(x) = \frac{\sin x}{\cos x + c} \text{ für } x \in I.$$

Wir folgern für $x \in I$:

$$\begin{aligned} e^{y(x)} \sin x &= e^{-\ln(\cos x + c)} \sin x \\ &= \frac{\sin x}{e^{\ln(\cos x + c)}} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x + c} \\ &= y'(x). \end{aligned}$$

Somit ist y eine Lösung von $y' = e^y \sin x$ auf I.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = \frac{\sin y}{x}, y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}, x > 0$;

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = \tan x \cdot (y^2 - 1), y(0) = 0, x > 0$.

Lösung

a) Die Gleichung hat die Form $y' = f(x)g(y)$ mit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1/x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = \sin y$. Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)g(y), y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$ auf $I = (0, \infty)$.

Die Nullstellen von g sind $y_n := n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Die konstanten Funktionen $\varphi_n : I \to \mathbb{R}, \varphi_n(x) = y_n$ erfüllen also die Gleichung auf I, jedoch nicht die Anfangsbedingung. Sei $\varphi \in C^1(I)$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf I. Dann gilt f.a. $x \in I$:

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \text{ wobei } x_0 := 1/2, y_0 := \pi/2.$$

Wir berechnen die Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} &= \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{\sin t} \\ &= [\ln \tan(t/2)]_{y_0}^{y} \\ &= \ln \tan(y/2) - \ln \tan(y_0/2) \\ &= \ln \tan(y/2) - \ln \tan(\pi/4) \\ &= \ln \tan(y/2) \end{aligned}$$

— bitte wenden —

und

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f(t)dt &= \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t}\\ &= [\ln t]_{x_0}^{x}\\ &= \ln(x/x_0)\\ &= \ln(2x).\end{aligned}$$

Folglich erfüllt φ die Identität $\ln\tan(\varphi(x)/2) = \ln(2x)$. Damit ist $\varphi(x) = 2\arctan(2x)$.

b) Die Gleichung hat die Form $y' = f(x)g(y)$ mit $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = y^2 - 1$. Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)g(y), y(0) = 0$ auf $I = (0, \infty)$.

Offenbar sind die beiden konstanten Lösungen der Gleichung, die sich als Nullstellen von g ergeben, keine Lösung des Anfangswertproblems. Sei $\varphi \in C^1(I)$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf I. Dann gilt f.a. $x \in I$:

$$\int_0^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_0^x f(t)dt.$$

Wir berechnen die Integrale:

$$\begin{aligned}\int_0^{y} \frac{dt}{g(t)} &= -\int_0^{y} \frac{dt}{1-t^2}\\ &= -[\operatorname{arctan}(t)]_0^{y}\\ &= -\arctan y.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^{x} f(t)dt &= \int_0^{x} \tan(t)dt\\ &= -[\ln(|\cos t|)]_0^{x}\\ &= -\ln(|\cos x|).\end{aligned}$$

Wegen $\arctan y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ für $|y| < 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\frac{1+\varphi(x)}{1-\varphi(x)} = \ln(|\cos x|) &\iff \ln\frac{1+\varphi(x)}{1-\varphi(x)} = \ln(|\cos x|^2)\\ &\iff \frac{1+\varphi(x)}{1-\varphi(x)} = (\cos x)^2\\ &\iff \varphi(x)(1+\cos^2 x) = \cos^2 x - 1\\ &\iff \varphi(x) = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x + 1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}y^2}, y(0) = 3$;

b) $y' = e^{x-y-e^y}, y(1) = 0$;

c) $y' = -\frac{1}{2x}\frac{y^2-6y+5}{y-3}, y(1) = 2$.

Lösung

a) Trennung der Variablen liefert für die Lösung y:

$$\int_3^{y(x)} t^2 dt = \int_0^x \frac{tdt}{3\sqrt{1+t^2}}$$

Wegen $\frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ gilt $\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = [\sqrt{1+t^2}]_0^x = \sqrt{1+x^2} - 1$. Somit:

$$\begin{aligned}\int_3^{y(x)} t^2 dt &= \frac{1}{3}[t^3]_3^{y(x)} \\ &= \frac{1}{3}(y^3(x) - 27) \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2} - 1).\end{aligned}$$

Damit ist $y(x) = (\sqrt{1+x^2} + 26)^{1/3}$.

b) Wir formen die Gleichung um und erhalten $y'e^y e^{e^y} = e^x$. Mit $(e^{e^y})' = y'e^y e^{e^y}$ folgt $e^{e^{y(x)}} = e^x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wegen $y(1) = 0$ ergibt sich $(e^{e^{y(1)}}) = e^{e^0} = e^0 + c$, also $c = 0$. Damit ist $e^{e^{y(x)}} = e^x$ und somit $y(x) = \ln\ln(e^x) = \ln x$.

c) Die Trennung der Variablen liefert für die Lösung y:

$$\int_2^{y(x)} \frac{2(t-3)}{t^2-6t+5} dt = -\int_1^x \frac{1}{x}.$$

Ausführung der Integrale liefert $[\ln|t^2 - 6t + 5|]_2^{y(x)} = -[\ln|x|]_1^x$. Daraus ergibt sich $\ln|y(x)^2 - 6y(x) + 5| - \ln 3 = -\ln|x|$. Wir formen das um und erhalten $\ln|y(x)^2 - 6y(x) + 5| = \ln(3/|x|)$. Das gilt genau dann, wenn $|y(x)^2 - 6y(x) + 5| = 3/|x|$.

Da die Lösung auf einem Intervall I definiert sein muss mit $1 \in I$, gehen wir von $I \subseteq (0, \infty)$ aus. Auf I ist $|x| = x$. Da $y(1) = 2$, ist $y(1)^2 - 6y(1) + 5 = -3 < 0$. Wegen $y \in C^1(I)$, gibt es eine Umgebung $J \subseteq I$ von 1 mit $y(x)^2 - 6y(x) + 5 < 0, x \in J$. Somit gilt $y(x)^2 - 6y(x) + 5 = -3/x$ auf J bzw. $y(x)^2 - 6y(x) + 5 + 3/x = 0$. Wir lösen diese Gleichung bzgl. $y(x)$ auf und erhalten:

$$y(x) = 3 \pm \sqrt{4 - 3/x}.$$

Wegen $y(1) = 2$ folgern wir, dass $y(x) = 3 - \sqrt{4 - \frac{3}{x}}$ die Lösung des Anfangswertproblems auf J ist. Da aber y auf ganz $I = (\frac{3}{4}, \infty)$ definiert ist, in $C^1(I)$ liegt und auf I die Gleichung sowie die Anfangsbedingung erfüllt, ist y die Lösung auf I.

Aufgabe 4

Lösen Sie die Differentialgleichung:

a) $x(x+1)y' + (x-2)y^2 = 0$;

b) $2xy + (1+x^2)y' = 0$.

Lösung

a) Wir trennen die Variablen und erhalten:

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{x-2}{x(x+1)}.$$

Mit Partialbruchzerlegung erhalten wir:

$$\frac{x-2}{x(x+1)} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}.$$

Wir integrieren:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y^2} dy &= -\frac{1}{y} \\ &= -\int \frac{x-2}{x(x+1)} \\ &= 2\int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{1}{x+1} \\ &= 2\ln|x| - 3\ln|x+1| + C \\ &= \ln \frac{x^2}{|x+1|^3} + C.\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{-\ln \frac{x^2}{|x+1|^3} - C} \\ &= \frac{1}{\ln \frac{|x+1|^3}{x^2} - C}.\end{aligned}$$

b) Trennung der Variablen liefert:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2x}{1+x^2}$$

Es folgt $\ln|y| = -\ln|1+x^2| + C$. Somit ist $|y| = e^C 1/(1+x^2)$. Wir setzen $A := e^C$ und erhalten $|y| = A/(1+x^2)$. Also existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $y = \frac{K}{1+x^2}$.