KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis 14.11.213
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 13 *Existenz und Eindeutigkeit*

Zeigen Sie bei den folgenden Anfangswertproblemen, dass sie jeweils genau eine Lösung im Intervall $[1, 2]$ besitzen:

a) $y' = \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})y, y(\frac{3}{2}) = 10^3$;

b) $y' = \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})y^2, y(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$.

Lösung
Es gilt $3x - x^2 - 2 = (x - 1)(2 - x) \geqslant 0$ auf $[1, 2]$. Also ist $\sqrt{3x - x^2 - 2}$ definiert auf diesem Intervall.

a) Wir setzen $f(x, y) := \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})y$ für $(x, y) \in R := \{(s, t) : |s - \frac{3}{2}| \leqslant \frac{1}{2}, |t - 10^3| \leqslant b\}$ mit einem $b \in (0, \infty)$. Dann gilt wegen $|\sin t| \leqslant 1$:

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |\sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})||y - z| \leqslant |y - z|$$

und

$$M := \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)| \leqslant \max_{(x,y)\in R} |y| \leqslant b + 10^3.$$

Da f stetig in R ist und Lipschitz-stetig bzgl. y, liefert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass es eine eindeutige Lösung auf $[\frac{3}{2} - \alpha, \frac{3}{2} + \alpha]$ gibt mit $\alpha := \min\{\frac{1}{2}, \frac{b}{M}\}$. Nun gilt $\frac{b}{M} \geqslant \frac{b}{b+10^3}$. Da b beliebig sein kann, können wir jedes $b \geqslant 10^3$ wählen, sodass $\frac{b}{M} \geqslant \frac{1}{2}$ wird und somit $\alpha = \frac{1}{2}$. Dadruch erhalten wir Existenz und Eindeutigkeit auf $[1, 2]$.

b) Wir setzen $f(x, y) := \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})y^2$ für $(x, y) \in R := \{(s, t) : |s - \frac{3}{2}| \leqslant \frac{1}{2}, |t - \frac{1}{4}| \leqslant b\}$ mit einem $b \in (0, \infty)$. f ist stetig auf R. Wie in a) gilt:

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |\sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})||y^2 - z^2| \leqslant |y + z||y - z| \leqslant (|y| + |z|)|y - z|.$$

und

$$M := \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)| \leqslant \max_{(x,y)\in R} |y| \leqslant b + \frac{1}{4}.$$

Für $(x, y), (x, z) \in R$ gilt $|y| + |z| \leqslant 2(b + \frac{1}{4})$. Damit ist $|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant 2(b + \frac{1}{4})|x - y|$. Also f Lipschitz-stetig bzgl. y. Wir setzen $b := \frac{1}{4}$, sodass $\frac{b}{M} \geqslant \frac{b}{b+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Mit $\alpha := \min\{\frac{1}{2}, \frac{b}{M}\} = \frac{1}{2}$ erhalten wir mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass es genau eine Lösung auf $[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha] = [1, 2]$ gibt.

— bitte wenden —

Aufgabe 14 ***Differentialgleichung mit getrennten Variablen***

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(x)g(y), y(x_0) = y_0$ mit $f \in C(I_1), g \in C^1(I_2), x_0 \in I_1, y_0 \in I_2, I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung
Wir haben eine Gleichung der Gestalt $y' = F(x,y)$ mit $F(x,y) := f(x)g(y)$. Da $f \in C(I_1)$ und $g \in C(I_2)$, ist $F \in C(R)$ mit $R := I_1 \times I_2$. Nun gilt $|F(x,y) - F(x,z)| = |f(x)||g(y) - g(z)|$. Der Mittelwertsatz liefert, dass zu $y, z \in I_2$ ein $\xi(y,z) \in [\min y, z, \max y, z]$ existiert mit $g(y) - g(z) = g'(\xi(y,z))(y - z)$. Damit ist $|F(x,y) - F(x,z)| = |f(x)||g(y) - g(z)| = |f(x)||g'(\xi(y,z))||y - z|$. Seien nun $U = \{x \in I_1 : |x - x_0| \leqslant a\} \subseteq I_1$ und $V := \{y \in I_2 : |y - y_0| \leqslant b\} \subseteq I_2$. Da $f \in C(U), g' \in C(V)$ und U, V kompakt, gibt es $A \geqslant 0$ und $B \geqslant 0$ mit $|f(x)| \leqslant A$ für alle $x \in U$ und $|g'(y)| \leqslant B$ für alle $y \in V$. Auf $R' := U \times V$ gilt damit $|F(x,y) - F(x,z)| \leqslant L|y - z|$ mit $L := A \cdot B$. Da ferner $F \in C(R')$ ist, liefert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass es ein Intervall $I \subseteq U$ gibt, sodass auf I genau eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.

Aufgabe 15 ***Bernoullische Gleichung***

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' + h(x)y = q(x)y^\alpha, y(x_0) = y_0 > 0$, zur Bernoullischen Differentialgleichung mit $h, q \in C(I_1)$, $I_1 = \{x : |x - x_0| \leqslant a\}$ und $\alpha \neq 1$. Zeigen Sie, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung
Die Gleichung hat die Gestalt $y' = f(x,y)$ mit $f(x,y) := -h(x)y + q(x)y^\alpha$. Wir setzen ferner $g(y) := y^\alpha$ für $y > 0$. Dann ist $g \in C^1((0,\infty))$. Nun gilt:

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |h(x)(z-y) + q(x)(g(y) - g(z))| \leqslant |h(x)||y-z| + |q(x)||g(y) - g(z)|.$$

Analog zu Aufgabe 14 existiert zu $y, z \in (0,\infty)$ ein $\xi(y,z) \in [\min\{y,z\}, \max\{y,z\}]$ mit

$$g(y) - g(z) = g'(\xi(y,z))(y - z) = \alpha(\xi(y,z))^{\alpha-1}(y - z).$$

Damit ist $|g(y) - g(z)| \leqslant \alpha|\xi(y,z)|^{\alpha-1}|y - z|$. Sei nun $I_2 := [y_0 - b, y_0 + b]$ mit einem $b > 0$ und $y_0 - b > 0$, sodass $y_0 \in I_2$ und $0 \notin I_2$. Dann gibt es ein $A \geqslant 0$ mit $\alpha|\xi(y,z)|^{\alpha-1} \leqslant A$ für alle $y, z \in I_2$, da mit $y, z \in I_2$ auch $\xi(y,z) \in I_2$. Da $h, q \in C(I_1)$, gibt es ein $B \geqslant 0$ mit $h(x), q(x) \leqslant B$ für alle $x \in I_1$. Es folgt:

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leqslant |h(x)||y-z| + |q(x)||g(y) - g(z)| \leqslant B|y-z| + A \cdot B|y-z| \leqslant L|y-z|$$

mit $L := \max\{A, A \cdot B\}$. Damit ist f Lipschitz-stetig auf $R := I_1 \times I_2$. Ferner ist f stetig auf R. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert somit die Existenz einer eindeutigen Lösung auf einem Intervall $J \subseteq I_1$.

Aufgabe 16 ***Implizite Differentialgleichungen***

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme in Parameterform:

— bitte wenden —

a) $(y')^3 + y' - x = 0, y(0) = 1;$

b) $y - \ln(1 + (y')^2) = 0, y(0) = 0;$

c) $x^2 e^{y'} + xy' - y = 0, y(1) = 1.$

Lösung

a) Wir prüfen, ob eine affine Funktion auf einem Intervall J Lösung der Gleichung sein kann:

$$F(x, ax+b, a) = a^3+a-x = 0 \text{ für alle } x \in J \text{ genau dann, wenn } x = a^3+a \text{ für alle } x \in J.$$

Da dies offenbar nicht sein kann, entfallen affine Funktionen als Lösungen.
Wir machen den Ansatz $t := y'(x), \psi(t) := x, \chi(t) := y$. Aus $F(\psi(t), \chi(t), t) = 0$ folgt $t^3 + t - \psi(t) = 0$ und somit $\psi(t) = t^3 + t$. Wegen $\chi'(t) = t\psi'(t)$ ergibt sich $\chi'(t) = 3t^3 + t$. Folglich ist $\chi(t) = \frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$. Wir setzen die Anfangsbedingung ein: $0 = x = \psi(t) = t^3 + t$, also $t = 0$. Nun folgt $1 = y(0) = \chi(0) = C$. Somit lautet die Lösung in Parameterform $\psi(t) = t^3 + t, \chi(t) = \frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 1$.

b) Wir betrachten Geraden als Lösungen: $0 = F(x, ax + b, a) = ax + b - \ln(1 + a^2)$. Das gilt genau dann, wenn $ax + b = \ln(1 + a^2)$ ist. Das kann nur bei $a = 0$ gelten. Das führt zusammen mit der Anfangsbedingung auf $y(x) = 0$ als Lösung.
Für nicht-affine Lösungen machen wir den Einsatz $t := y', \psi(t) := x, \chi(t) := y$. Dann führt $F(\psi(t), \chi(t), t) = 0$ auf $\chi(t) - \ln(1+t^2) = 0$ und somit $\chi(t) = \ln(1+t^2)$. Weiter gilt $\chi'(t) = t\psi'(t)$ und somit $\psi'(t) = \chi'(t)/t = \frac{2}{1+t^2}$. Integration liefert $\psi(t) = 2\arctan(t) + C$. Aus der Anfangsbedingung folgt $0 = y = \chi(t) = \ln(1 + t^2)$ und somit $t = 0$ sowie $0 = x = \psi(0) = 2\arctan(0) + C = C$ und somit $C = 0$. Die Parameterdarstellung der Lösung ist also $\psi(t) = 2\arctan(t), \chi(t) = \ln(1 + t^2)$.

c) Man sieht leicht, dass affine Funktionen keine Lösungen sind. Nun machen wir die übliche Ersetzung $t := y', \chi(t) := y, \psi(t) := x$ und erhalten $\chi(t) = \psi(t)^2 e^t + t\psi(t)$ sowie $\chi' = t\psi'$. Damit gilt $t\psi'(t) = 2\psi(t)\psi'(t)e^t + \psi(t)^2 e^t + t\psi'(t) + \psi(t)$. Es folgt $\psi' = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\psi(t)$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet $\psi(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t} + e^{-t}$. Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ liefert $1 = x = \psi(t)$ und $1 = y = \chi(t) = e^t + t$. Also $t = 0$ und damit $1 = x = \psi(t) = C + 1$. Es folgt $C = 0$ und damit $\psi(t) = e^{-t}$ und $\chi(t) = e^{-t} + te^{-t} = (1 + t)e^{-t}$.