KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
21.11.213

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 17 *Implizite Differentialgleichungen*

Wir betrachten die folgende implizite differentialgleichung:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - xy' + (y')^2.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen dieser Differentialgleichung;

b) Für welche Werte (x_0, y_0) gibt es eine Lösung y, die $y(x_0) = y_0$ erfüllt?

c) Für welche Werte (x_0, y_0) gibt es genau eine solche Lösung?

Lösung

Man sieht leicht, dass Geraden keine Lösung sind. Nun machen wir den üblichen Ansatz $t := y', \psi(t) := x, \chi(t) := y$, und erhalten $\chi' = t\psi'$ und $\chi = \frac{1}{2}\psi^2 - t\psi + t^2$. Differentieren der letzten Gleichung liefert $\chi' = t\psi' = \psi\psi' - \psi - t\psi' + 2t$. Dies führt auf $(2t - \psi)\psi' = 2t - \psi$. Ist $\psi = 2t$, so ergibt sich $\chi = 2t^2 - 2t^2 + t^2 = t^2 = \frac{1}{4}\psi^2$. Somit ist $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ eine Lösung. Ist $\psi \neq 2t$, so folgt $\psi' = \frac{2t-\psi}{2t-\psi} = 1$. Damit ist $\psi(t) = t + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Das führt auf $\chi = \frac{1}{2}(t+C)^2 - t(t+C) + t^2 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}C^2$. Mit $t = \psi - C = x - C$ folgt $y(x) = \frac{1}{2}(x-C)^2 + \frac{1}{2}C^2 = \frac{1}{2}x^2 - Cx + C^2$.

Nun prüfen wir, für welche Werte (x_0, y_0) eine Lösung des Anfagswertproblems $y = \frac{1}{2}x^2 - xy' + (y')^2, y(x_0) = y_0$ existiert. Ist $y(x) = \frac{1}{4}x^2$, so ist das genau dann der Fall, wenn $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$ ist. Im anderen Fall muss gelten $y_0 = \frac{1}{2}x_0^2 - Cx_0 + C^2$ $(*)$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Dazu muss die Gleichung $C^2 - x_0 C + \frac{1}{2}x_0^2 - y_0 = 0$ lösbar sein, was genau dann der Fall ist, wenn $0 \leqslant x_0^2 - 4(\frac{1}{2}x_0^2 - y_0) = -x_0^2 + 4y_0$, bzw. genau dann, wenn $y_0 \geqslant \frac{1}{4}x_0^2$.

Ist $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$, so hat das Anfangswertproblem zwei verschiedene Lösungen $y_1(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $y_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x_0}{2}x + \frac{x_0^2}{4}$. Ist $y_0 > \frac{1}{4}x_0^2$, so hat $(*)$ zwei verschiedene Lösungen, die zu zwei verschiedenen Lösungen des Anfangswertproblems führen. Also ist das Anfangswertproblem für keine Werte (x_0, y_0) eindeutig lösbar.

Aufgabe 18 *Bewegung im Gravitationsfeld*

Eindimensionale Bewegung im Gravitationsfeld wird beschrieben durch das Anfangswertproblem $y'' = -\gamma\frac{M}{y^2(t)}, y(0) = R, y'(0) = v_0$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche v_0, sodass ein Körper, der sich in einem eindimensionalen Gravitationsfeld bewegt, ins

Unendliche entweichen kann.

Lösung

Wir setzen $p(y) = y'$. Damit y die Gleichung $F(y, y', y'') = 0$ löst mit $F(y, y', y'') := \frac{\gamma M}{y^2} + y''$, muss für p gelten $F(t, p, p'p) = 0$ und damit $p'p = -\frac{\gamma M}{t^2}$. Wegen $p'p = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}p^2$ ergibt sich $p^2(t) = \frac{2\gamma M}{t} + C$. Die Anfangsbedingung liefert $v_0 = y'(0) = p(y(0)) = p(R) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{t} + C}$. Es folgt $C = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R}$. Jetzt haben wir $p^2(y) = (y')^2 = \frac{2\gamma M}{y} + v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R}$. Wir fordern $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ und somit $v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R} = \lim_{t\to\infty}(y'(t))^2$. Also ist $v_0^2 = \frac{2\gamma M}{R} + \lim_{t\to\infty}(y'(t))^2 \geqslant \frac{2\gamma M}{R}$. Das kleinstmögliche v_0 ergibt sich also zu $v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$. Für diesen Wert von v_0 ergibt sich wegen $C = 0$ die Gleichung $y' = p(y) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{y}}$. Mit der Methode der Trennung der Variablen erhalten wir als ihre allgemeine Lösung $y(t) = (\frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + C)^{2/3}$. Die Anfangsbedingung liefert $C^{2/3} = y(0) = R$ und damit $y(t) = (\frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + R^{3/2})^{2/3}$.

Aufgabe 19 ***Exakte Differentialgleichungen***

Prüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit:

a) $(1 - x^2e^y)y' = 2xe^y$;

b) $(y + x) - (y - x)y' = 0$;

c) $(x^2y^2 + x^3)dx + (\frac{2}{3}x^3y + y^3)dy = 0$;

d) $\frac{4x^2-y^2}{x^2}dx + \frac{2y}{x}dy = 0$.

Lösung

a) Wir formen die Gleichung um und erhalten $2xe^y dx + (x^2e^y - 1)dy = 0$. Nun gilt $D_y(2xe^y) = 2xe^y$ und $D_x(x^2e^y - 1) = 2xe^y$. Damit ist die Gleichung exakt.

b) Nach Umformung haben wir $(y + x)dx + (x - y)dy = 0$. Es gilt $D_y(y + x) = 1$ und $D_x(x - y) = 1$. Daher ist die Gleichung exakt.

c) Wegen $D_y(x^2y^2 + x^3) = 2x^2y$ und $D_x(\frac{2}{3}x^3y + y^3) = 2x^2y$ ist die Gleichung exakt.

d) Es gilt $D_y\frac{4x^2-y^2}{x^2} = -2\frac{y}{x^2}$ und $D_x(\frac{2y}{x}) = -2\frac{y}{x^2}$. Also ist die Gleichung exakt.

Aufgabe 20 ***Integrierender Faktor***

Prüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit und bestimmen Sie im Falle der Nicht-Exaktheit einen integrierenden Faktor:

a) $(x^2 - y)dx + xdy = 0$;

b) $4xdx + (2x^2 - e^{-y})dy = 0$.

Lösung

a) Es gilt $D_y(x^2 - y) = -1$ und $D_x(x) = 1$. Die Gleichung ist nicht exakt. Wir suchen nach einem integrierenden Faktor der Gestalt $\mu = \mu(x)$. Mit $f(x,y) := x^2 - y, g(x,y) := x$ soll dann gelten $D_y(\mu f) = \mu D_y f = D_x(\mu g) = \mu' g + \mu D_x g$. Es folgt $\mu' = \frac{D_y f - D_x g}{g}\mu = -\frac{2}{x}\mu$ und somit $\mu(x) = \exp(-2\int \frac{dx}{x}) = \exp(-2\ln x) = x^{-2}$.

b) Wir definieren $f(x,y) := 4x, g(x,y) := (2x^2 - e^{-y})$. Wegen $D_y f(x,y) = 0$ und $D_x g(x,y) = 4x$ ist die Gleichung nicht exakt. Wir haben bei a) gesehen, dass ein integrierender Faktor der Gestalt $\mu = \mu(x)$ auf die Gleichung $\mu' = \frac{D_y f - D_x g}{g}\mu$ führt. Da aber g auch von y abhängt, müsste auch μ von y abhängen. Deswegen suchen wir nach einem Faktor der Gestalt $\mu = \mu(y)$. Dies führt auf $D_y(\mu f) = \mu' f + \mu D_y f = \mu D_x g$ und somit $\mu' = \frac{D_x g - D_y f}{f}\mu = \mu$ und somit $\mu(y) = e^y$.

Wichtige Termine:

- Die **Übungsklausur** findet am Samstag, 01.02.2014, von 08.00 bis 10.00 Uhr statt.
- Die **Klausur** zur Vorlesung findet am Donnerstag, 06.03.2014, von 11.00 bis 13.00 Uhr statt.
- Der **Anmeldesschluss** für die Klausur ist Freitag, 07.02.2014. Für die Teilnahme an der Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.