KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
28.11.213

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik
6. Übungsblatt

Aufgabe 21 *Exakte Differentialgleichungen*

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = \frac{x+y^2}{1-2xy}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung exakt auf $\mathbb{R}^2$ ist und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Lösung

Nach Umformung erhalten wir $(x+y^2)dx + (2xy-1)dy = 0$. Wir setzen $f(x,y) := x+y^2, g(x,y) := 2xy-1$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $D_y f(x,y) = 2y$ und $D_x g(x,y) = 2y$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$. Daher ist die Gleichung exakt auf $\mathbb{R}^2$.
Wir suchen eine Funktion H mit $H_x(x,y) = f(x,y)$ und $H_y(x,y) = g(x,y)$. Es gilt $H(x,y) = \int f(x,y)dx = \int (x+y^2)dx = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + h(y)$ für eine Funktion h. Nun muss gelten $H_y(x,y) = 2xy + h'(y) = g(x,y) = 2xy-1$ und somit $h'(y) = -1$. Also ist $h(y) = -y+C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Es folgt $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2+xy^2-y+C$ und die allgemeine Lösung der Gleichung ist implizit gegeben durch $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 - y + C = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Anders geschrieben lautet die allgemeine Lösung $\frac{1}{2}x^2 + xy^2 - y = c$.

Aufgabe 22 *Exakte Differentialgleichungen*

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems in impliziter Form:

$$\cos y + 2xy + (x^2 - y - x\sin y)y' = 0, y(0) = \sqrt{2}.$$

Lösung

Wir bringen die Gleichung auf die symmetrische Form und erhalten $(\cos y + 2xy)dx + (x^2 - y - x\sin y)dy = 0$. Wir setzen $f(x,y) := \cos y + 2xy, g(x,y) := x^2 - y - x\sin y$. Wegen $f_y(x,y) = -\sin y + 2x, g_x(x,y) = 2x - \sin y$ ist de Gleichung exakt.
Wir suchen eine Stammfunktion H mit $H_x = f, H_y = g$. Es soll also gelten $H_x(x,y) = f(x,y) = \cos y + 2xy$. Somit $H(x,y) = \int(\cos y + 2xy)dx = x\cos y + x^2 y + h(y)$ für eine Funktion h. Nun muss gelten $g(x,y) = x^2 - y - x\sin y = H_y(x,y) = -x\sin y + x^2 + h'(y)$ und daher $h'(y) = -y$. Das führt auf $h(y) = -\frac{1}{2}y^2$ und $H(x,y) = x\cos y + x^2 y - \frac{1}{2}y^2$. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $x\cos y + x^2 y - \frac{1}{2}y^2 = C$.

Aufgabe 23 *Integrierender Faktor*

Prüfen Sie die Differentialgleichung $y' = -\frac{xy^3}{1+2x^2y^2}$ auf Exaktheit. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

— bitte wenden —

Lösung
Die symmetrische Form lautet $xy^3dx + (1 + 2x^2y^2)dy = 0$. Wir setzen $f(x,y) := xy^3, g(x,y) := 1 + 2x^2y^2$. Wegen $f_y(x,y) = 3xy^2 \neq 4xy^2 = g_x(x,y)$ ist die Gleichung nicht exakt.
Wir suchen einen integrierenden Faktor μ mit $D_y(\mu f) = D_x(\mu g)$. Wir versuchen $\mu = \mu(y)$. Das führt auf $\mu' f + \mu f_y = \mu g_x$ und somit $\mu' = \frac{g_x - f_y}{f}\mu = \frac{xy^2}{xy^3}\mu = \frac{1}{y}\mu$. Somit ist $\mu(y) = \exp(\int \frac{dy}{y}) = \exp(\ln y) = y$. Damit ist die Gleichung $xy^4dx + (y + 2x^2y^3)dy = 0$ exakt. Für die Stammfunktion H gilt $H(x,y) = \int xy^4dx = \frac{1}{2}x^2y^4 + h(y)$ sowie $y + 2x^2y^3 = D_y(\frac{1}{2}x^2y^4 + h(y)) = 2x^2y^3 + h'(y)$ und somit $h'(y) = y$ und $h(y) = \frac{1}{2}y^2$. Daher ist $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{4}y^2$. Die allgemeine Lösung ist also implizit gegeben durch $y^2(x^2 + y^2) = C$.

Aufgabe 24 ***Integrierender Faktor***

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form der Differentialgleichung

$$(\frac{1}{x^2} + 2y^2)dx + xydy = 0$$

a) Durch Bestimmung eines integrierenden Faktors;

b) Durch Überführung in eine Bernoullische Differentalgleichung.

Lösung

a) Wir setzen $f(x,y) := \frac{1}{x^2} + 2y^2, g(x,y) := xy$. Wegen $f_y(x,y) = 4y, g_x(x,y) = y$ ist die Gleichung nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor der Gestalt $\mu = \mu(x)$. Es muss gelten $D_y(\mu f) = \mu f_y = D_x(\mu g) = \mu' g + \mu g_x$ und somit $\mu' = \frac{f_y - g_x}{g}\mu = \frac{3y}{xy}\mu = \frac{3}{x}\mu$. Damit ist $\mu(x) = x^3$. Die Gleichung $(x + 2x^3y^2)dx + x^4ydy = 0$ ist exakt. Für die Stammfunktion folgt $H(x,y) = \int(x + 2x^3y^2)dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4y^2 + h(y)$ und $H_y(x,y) = x^4y + h'(y) = x^4y$, sodass $h(y) = 0$ bzw. $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4y^2$. Die implizite Darstellung der allgemeinen Lösung ist demnach $x^2(1 + x^2y^2) = C$.

b) Wir formen die Glechung um und erhalten $xyy' + \frac{1}{x^2} + 2y^2 = 0$ bzw. $y' + \frac{2}{x}y = -\frac{1}{x^3}y^{-1}$. Dies ist eine Bernoullische Gleichung. Mit $\mu(x) = \exp(\int \frac{2dx}{x}) = x^2$ und $u := \mu y$ erhalten wir $u' = -\mu^2 \cdot \frac{1}{x^3}\frac{1}{u} = -x\frac{1}{u}$. Somit $\int udu = \frac{1}{2}u^2 = -\int xdx = -\frac{1}{2}x^2 + C$ bzw. $u^2 = x^4y^2 = -x^2 + C$ oder $x^2(1 + x^2y^2) = C$.

Wichtige Termine:

- Die **Übungsklausur** findet am Samstag, 01.02.2014, von 08.00 bis 10.00 Uhr statt.
- Die **Klausur** zur Vorlesung findet am Donnerstag, 06.03.2014, von 11.00 bis 13.00 Uhr statt.
- Der **Anmeldesschluss** für die Klausur ist Freitag, 07.02.2014. Für die Teilnahme an der Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.