KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
05.12.213

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik
7. Übungsblatt

Aufgabe 25 ***Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen n-ter Ordnung und Gleichungssystemen***

Gegeben sei die Differentialgleichung n-ter Ordnung $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$. Zeigen Sie, dass diese Gleichung äquivalent zu einem Differentialgleichungssytem 1-ter Ordnung ist.

Lösung
Wir definieren $u := (u_1, \ldots, u_n) := (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Dann gilt $u' = (y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = (u_2, \ldots, u_n, f(x, u_1, \ldots, u_n)) = (u_2, \ldots, u_n, f(x, u))$. Somit erfüllt y die Gleichung $y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ genau dann, wenn u die Gleichung $u' = (u_2, \ldots, u_n, f(x, u)) = F(x, u)$ erfüllt, wobei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 26 ***Fundamentalsystem***

Wir betrachten die Gleichung (*) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, x \in J, p, q \in C(J), J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien y_1, y_2 Lösungen der Gleichung mit $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_2'(x) \neq 0, x \in J$. Zeigen Sie, dass $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$die allgemeine Lösung der Gleichung auf J ist.

Löung
Wir zeigen, dass y_1, y_2 linear unabhängig sind. Es gelte $ay_1 + by_2 = 0$ in J für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $ay_1' + by_2' = 0$ in J. Also gilt für alle $x \in J$:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt wegen Voraussetzung $\det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$. Das Gleichungssystem ist damit nur trivial lösbar. Wir folgern $a = 0 = b$. Das bedeutet, dass y_1, y_2 linear unabhängig sind. Da der Lösungsraum der Gleichung zweidimensional ist, bilden sie also eine Basis davon. Das beweist die Behauptung.

— bitte wenden —

Aufgabe 27 ***Erzeugung eines Fundamentalsystems***

Wir bleiben bei der Gleichung aus der Aufgabe 26. Seien nun $x_0 \in J$ und $y_1, y_2 \in C^2(J)$ zwei Lösungen der Gleichung mit $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$. Zeigen, dass die allgemeine Lösung der Gleichung auf J durch $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ gegeben ist.

Lösung

Wir definieren $W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}, x \in J$. Es gilt $W \in C(J)$ und $W(x_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$. Da W stetig, gibt es eine Umgebung U von x_0, in der $W(x) \neq 0$ ist. Nach Aufgabe 26 bilden damit y_1, y_2 eine Basis des Lösungsraums auf U. Ist nun $y \in C^2(J)$ eine Lösung auf J, so ist $y|_U$ eine Lösung auf U. Deshalb gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $y|_U = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Also gilt auch $c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0), c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$. Damit ist $c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung des Anfangswertproblems $u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$ in J, $u(x_0) = y(x_0), u'(x_0) = y'(x_0)$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes folgt $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Aufgabe 28 ***Differentialgleichung zweiter Ordnung***

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'' = y' + x^2, y(0) = 3, y'(0) = 1$, indem Sie $z := y'$ setzen.

Lösung

Wir setzen $z := y'$. Dann gilt $z' = z + x^2, z(0) = 1$. Die homogene Lösung dieser Gleichung lautet $z_h = e^x$. Eine spezielle Lösung ist gegeben durch $z(x) = z_h(x) \int \frac{x^2 dx}{e^x} = e^x \int x^2 e^{-x} dx = e^x e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) = -(x^2 + 2x + 2)$. Die allgemeine Lösung ergibt sich zu $z(x) = Ce^x - (x^2 + 2x + 2)$. Die Anfangsbedingung liefert $1 = z(0) = C - 2$ und somit $C = 3$. Nun haben wir $y'(x) = z(x) = 3e^x - (x^2 + 2x + 2)$. Daraus folgt $y(x) = 3e^x - (x^3/3 + x^2 + 2x + C)$. Die Anfangsbedingung liefert $3 = y(0) = 3 - C$ und somit $C = 0$. Also ist $y(x) = 3e^x - (x^3/3 + x^2 + 2x)$ die gesuchte Lösung.