KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
19.12.213

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 33 ***Homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung***

Lösen Sie die folgende Randwertaufgabe und das folgende Anfangswertproblem:

a) $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = 1, y(3/2) = -5;$

b) $y'' + 16y' + 100y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 8.$

Lösung

a) Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 + \pi^2 = (x - i\pi)(x + i\pi)$ mit den Nullstellen $i\pi$ und $-i\pi$. Damit lautet die allgemeine Lösung $y(x) = a\sin(\pi x) + b\cos(\pi x)$. Die Randbedingungen liefern $1 = y(0) = b$ und $-5 = y(3/2) = -a$. Somit lautet die Lösung $y(x) = 5\sin(\pi x) + \cos(\pi x)$.

b) Das charakeristische Polynom ist $p(x) = x^2 + 16x + 100$. Die Nullstellen sind $x_1 = -8-6i$ und $x_2 = -8+6i$. Die allgemein Lösung ist also $y(x) = c_1 e^{-8x}\sin(6x) + c_2 e^{-8x}\cos(6x)$. Mit $2 = y(0) = c_2$ folgt $y(x) = c_1 e^{-8x}\sin(6x) + 2e^{-8x}\cos(6x)$. Damit ist $y'(x) = -8e^{-8x}(c_1\sin(6x) + 2\cos(6x)) + e^{-8x}(6c_1\cos(6x) - 12\sin(6x))$. Damit gilt $8 = y'(0) = -16 + 6c_1$ und somit $c_1 = 4$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher $y(x) = 4e^{-8x}\sin(6x) + 2e^{-8x}\cos(6x)$

Aufgabe 34 ***Der gedämpfte harmonische Oszillator***

Lösen Sie die Bewegunsgleichung $y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = 0$ des gedämpften harmonischen Oszillators für die Fälle $\gamma > \omega_0, \gamma = \omega_0, \gamma < \omega_0$.
Lösung

a) $\gamma > \omega_0$:
In diesem Fall hat das charakterstische Polynom zwei reelle Nullstellen $x_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, x_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = e^{-\gamma x}(c_1 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}x} + c_2 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}x})$.

b) $\gamma = \omega_0$:
Das charakteristische Polynom hat eine zweifache reelle Nullstelle $-\gamma$. Damit lautet die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^{-\gamma x} + c_2 x e^{-\gamma x}$.

— bitte wenden —

c) $\gamma < \omega_0$:
Die zwei komplexen Nullstellen $-\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und $-\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ des charakteristischen Polynoms liefern als allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^{-\gamma x}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}x) + c_2 e^{-\gamma x}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}x)$.

Aufgabe 35 *Eulersche Differentialgleichung*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichung vom Eulerschen Typ:

a) $x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' - 2xy' + 20y = 0$;

b) $x^2 y^{(4)} + 5xy''' + y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$.

Lösung

a) Der Ansatz $y(x) = x^\lambda$ führt auf das charakteristische Polynom $p(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$. Das liefert als Fundamentalsystem $\{x^{-2}, x^{-2}\ln x, x^2\cos(\ln x), x^2\sin(\ln x)\}$.

b) Wir multiplizieren die Geichung mit x^2 und erhalten $x^4 y^{(4)} + 5x^3 y''' + x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$. Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung. Der übliche Ansatz $y(x) = x^\lambda$ führt auf das charakteristische Polynom $p(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+2)$. Das liefert als Fundamentalsystem $\{x, x\ln x, x(\ln x)^2, x^{-2}\}$.

Aufgabe 36 *Potenzreihenansatz*

Lösen Sie das Anfangswertproblem $xy'' - y' - 4x^3 y = 0, y(0) = 1, y''(0) = 0$, mit dem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$.
Lösung
Wir machen den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Ableiten liefert $y'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1}, y''(x) = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_n x^{n-2}$. Einsetzen in die Gleichung führt auf:

$$-a_1 + 3a_3 x^2 + \sum_{n=3}^\infty ((n-1)(n+1)a_{n+1} - 4a_{n-3})x^n = 0.$$

Es folgt $a_1 = 0, a_3 = 0, a_{n+1} = \frac{4}{(n-1)(n+1)}a_{n-3}$ für $n \geqslant 3$ bzw. $a_n = \frac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$ für $n \geqslant 4$. Ferner liefern die Anfangsbedingungen $a_0 = 1, a_2 = 0$. Mit vollständiger Induktion zeigen wir $a_n = \frac{1}{(n/2)!}$, falls $n = 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, und $a_n = 0$ sonst. Es folgt $y(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n)!}x^{4n} = \cosh(x^2)$.