KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
16.01.2013

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 37 *Potenzreihenansatz*

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit einem Potenzreihenansatz:

$$y'' + 2xy' - y = (1 + x + x^2)e^x, y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Lösung

Wir machen einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann gilt:

$$y'' + 2xy' - y = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} + (2n-1)a_n)x^n.$$

Die rechte Seite ergibt nach Einsetzen der Exponentialreihe:

$$(1 + x + x^2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n.$$

Koeffizientenvergleich liefert $(n+1)(n+2)a_{n+2} + (2n-1)a_n = \frac{1+n^2}{n!}$ und wir erhalten $a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} a_n$.

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass gilt $a_n = \frac{1}{2(n-1)!}$ für $n \geqslant 1$. Die Anfangsbedingung ergibt $y(0) = 0 = a_0$ und $y'(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2(1-1)!} = a_1$. Mit der Rekusionsformel von oben erhalten wir $a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1!}$. Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = \frac{1}{2(n-1)!}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2n!}$. Dann folgt $a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{2(n-1)!} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{n(2n-1)}{2(n+2)!} = \frac{1}{2(n+1)!}$. Analog zeigen wir $a_{n+3} = \frac{1}{2(n+2)!}$.

Nun gilt für die Lösung $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n-1)!} x^n = \frac{x}{2} e^x$.

Aufgabe 38 *Potenzreihenansatz*

Geben Sie die fünf ersten Terme der Potenzreihe um den Punkt $x = 2$ der Lösung des Anfangswertproblems $y'' + y' - \ln y = e^x, y(2) = e, y'(2) = e^2$.

Lösung

Wir machen den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$. Dann gilt $a_n = \frac{y^{(n)}}{n!}$. Wir brauchen die ersten fünf Terme, also Ableitungen von y bis Ordnung 4.

Wegen $y'' = e^x - y' + \ln y$ und $y(2) = e, y'(2) = e^2$ folgt $y''(2) = 1$. Aus der Gleichung folgt weiter $y''' = -y'' + y'/y + e^x$ und $y^{(4)} = -y''' - (y')^2/y^2 + y''/y + e^x$. Damit haben wir $y'''(2) = -1 + e + e^2$ und $y^{(4)}(2) = 1 + 1/e - e^2 - e$.

— bitte wenden —

Aufgabe 39 ***Verallgemeinerter Potenzreihenansatz***

Bestimmen Sie mit einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$x^2y'' + \frac{3}{2}xy' + xy = 0, x > 0.$$

Lösung

Wir mache einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\varrho}$. Es gilt $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\varrho)a_n x^{n+\varrho-1}$ und $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\varrho-1)(n+\varrho)a_n x^{n+\varrho-2}$. Einsetzen in die Gleichung liefert $\varrho(\varrho+1/2)a_0x^\varrho + \sum_{n=1}^{\infty}((n+\varrho)(n+\varrho+1/2)a_n + a_{n-1})x^{n+\varrho} = 0$. Es muss also gelten $\varrho(\varrho+1/2) = 0$. Wir folgern also $\varrho_1 = 0, \varrho_2 = -1/2$. Da $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}_0$ und beide reell, gibt es ein Fundamentalsystem der Form $y_1(x) = x^{\varrho_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, y_2(x) = x^{\varrho_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit $a_0, b_0 \neq 0$. Für $\varrho = \varrho_1$ liefert Koeffizientenvergleich $a_n = -\frac{4a_{n-1}}{(2n+1)2n}$. Wir setzen $a_0 = 1$. Dann erhalten wir $a_1 = -\frac{4}{3!}, a_2 = \frac{4^2}{5!}$ und vermuten $a_n = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$. Dies zeigen wir mit Induktion, wobei wir den Induktionsanfang gemacht haben. Nun gilt $a_n = -\frac{4a_{n-1}}{2n(2n=1)} = -\frac{(-4)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{4}{2n(2n+1)} = \frac{(-4)^n}{(2n+1)}$. Dies beweist unsere Vermutung. Es folgt also $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}x^n = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2\sqrt{x})^{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(2\sqrt{x})$. Mit $b_0 = 1$ finden wir analog $y_2(x) = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 40 ***Verallgemeinerter Potenzreihenansatz***

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz:

$$xy'' + 7y' + \frac{9}{x}y = 0, x > 0.$$

Lösung

Wir multiplizieren beide Seiten mit x und erhalten $x^2y' + 7xy' + 9y = 0$. Ein verallgemeinerter Potenzreihenansatz $y(x) = x^\varrho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ führt auf $(\varrho+3)^2 = 0$ und somit $\varrho = -3$. In diesem Fall gibt es ein Fundamentalsystem der Gestalt $y_1(x) = x^{-3}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, y_2(x) = (\ln x)y_1(x) + x^{-3}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ mit $c_0 \neq 0$. Einsetzen der Reihe von y_1 in die Differentialgleichung führt auf $x^2y' + 7xy' + 9y = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n x^{n-3} = 0$. Es folgt $c_n = 0$ für $n \neq 0$. Wir setzen $c_0 = 1$ und erhalten $y_1(x) = x^{-3}$. Es folgt $y_2(x) = \frac{\ln x}{x^3} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-3}$. Einsetzen in die Gleichung führt auf $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 d_n x^{n-3}$. Also ist $d_n = 0$ für $n \neq 1$. Also haben wir $y_2(x) = \frac{\ln x}{x^3}$. Die allgemeine Lösung lautet nun $y(x) = \frac{a+b\ln x}{x^3}$.