KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
23.01.2013

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 41 ***Matrixexponentialfunktion***

Berechnen Sie e^{tA} für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 42 & 1 & 2 \\ 0 & 42 & 2 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösung

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$. Daher $A^3 = AA^2 = 2AA = 4A$. Induktiv folgern wir $A^n = 2^{n-1}A, n \geqslant 1$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n A^n / n! \\
&= I + \sum_{n=1}^{\infty} t^n 2^{n-1} A / n! \\
&= I - A/2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} A \\
&= \frac{1}{2}(2I - A + e^{2t}A) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ 1 - e^{2t} & 1 + e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $A = \begin{pmatrix} 42 & 1 & 2 \\ 0 & 42 & 2 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$ gilt $A = B + C$ mit $B = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Offenbar gilt $BC = CB$ und daher $e^{t(B+C)} = e^{tB}e^{tC}$. Ferner gilt offenbar $e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{42t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{42t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{42t} \end{pmatrix}$. Weiter gilt $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C^n = 0, n \geqslant 3$. Daher $e^{tC} = I + C + C^2/2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Insgesamt folgt:

$$e^{tA} = e^{tB}e^{tC} = \begin{pmatrix} e^{42t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{42t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{42t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{42t} \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. In Aufgabe 44 werden wir sehen, dass 1 und 2 die Eigenwerte von A sind mit den Eigenräumen $ker(A-I) = \mathrm{lin}((1,1,3)^t)$ und $ker(A-2I) = \mathrm{lin}((0,1,1)^t, (1,0,1)^t)$. Daher gilt für $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tSDS^{-1}} \\ &= Se^{tD}S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 42 ***Differentialgleichungssystem***

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$, indem Sie die Matrixexponentialfunktion explizit ausrechnen und indem Sie das Gleichungssystem zu einer Gleichung 2-ter Ordnung umformen.

Lösung

Wir setzen $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und rechnen aus $A^2 = I$. Damit folgern wir $A^{2n} = I$ und $A^{2n+1} = A, n \in \mathbb{N}$. Damit gilt:

$$\exp(tA) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} A = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung $y(t) = a \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$.

Jetzt definieren wir $u := y_1$. Wegen $y' = Ay$ gilt $y_1' = y_2$ und $y_2' = y_1$, so dass $u'' = y_1'' = y_2' = y_1 = u$. Also gilt $u'' - u = 0$. Ein Fundamentalsystem für diese Gleichung ist $\{\cosh, \sinh\}$, was dem obigen Resultat entspricht.

Aufgabe 43 ***Fundamentalsystem bei einem Differentialgleichungssystem***

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y$ und $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} y$.

Lösung

Wir setzen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5).$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Wir bestimmen die zugehörigen Eigenräume:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Damit haben wir eine relle Lösung $e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und eine komplexe Lösung $e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert ein relles Fundamentalsystem:

$$\{e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \}.$$

Sei nun $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ergibt sich zu:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda + 1)^3.$$

Zu $\lambda = 0$ gehört der Eigenraum $\operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$. Das liefertt die Lösung:

$$y_1(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Der Eigenraum von $\lambda = -1$ ist $\text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Dazu gehört die Lösung:

$$y_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um weitere linear unabhängige Lösungen zu finde, ergänzen wir den gefundenen Eigenvektor zu einer Basis von $\ker(A+I)^2$. Es folgt:

$$\ker(A+I)^2 = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Das liefert die Lösung:

$$y_3(t) = e^{-t}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t(A+I)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ergänzen wir die zwei gefundenen Vektoren zu einer Basis von $\ker(A+I)^3$:

$$\ker(A+I)^3 = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Das liefert die noch fehlende Lösung:

$$y_4(t) = e^{-t}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A+I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2(A+I)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 44 *Differentialgleichungssystem*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von:

$$\begin{aligned} u' &= 3u + v - w \\ v' &= u + 3v - w \\ w' &= 3u + 3v - w. \end{aligned}$$

Lösung

Das Gleichungssystem kann man umschreiben in:

$$y' = Ay, y := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Das charakteristische Polynom von A bestimmt sich zu $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Damit sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Wir bestimmen die dazugehörigen Eigenräume:

$$\ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \}$$

$$\ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Damit erhalten wir ein Fundamentalsystem:

$$\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Wichtige Termine:

- Die **Übungsklausur** findet am Samstag, 01.02.2014, von 08.00 bis 10.00 Uhr statt.
- Die **Klausur** zur Vorlesung findet am Donnerstag, 06.03.2014, von 11.00 bis 13.00 Uhr statt.
- Der **Anmeldesschluss** für die Klausur ist Freitag, 07.02.2014. Für die Teilnahme an der Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.