KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
30.02.2014

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 45 *Inhomogenes Differentialgleichungssystem*

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}, y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Wir bestimmen ein Fundamentalsystem der dazugehörigen linearen Gleichung. Wir setzen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte von A sind offensichtlich 1 und 3. Wir bestimmen die Eigen- bzw. Haupträume:

$$\ker(A - I) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$\ker(A - 3I) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$\ker(A - 3I)^2 = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

So erhalten wir als Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine spezielle Lösung y_p zu finden, benutzen wir Variation der Konstanten:

$$y_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) b(s) ds,$$

wobei $\Phi(t) := (y_1(t)|y_2(t)|y_3(t))$.
Dies ergibt:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) - \begin{pmatrix} t+1 \\ t + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t^2 e^3 \\ -te^3 \end{pmatrix}.$$

Mit der Anfangsbedingung folgt $c_1 = 2, c_2 = \frac{7}{3}, c_3 = 0$.

Aufgabe 46 *Inhomogenes Differentialgleichungssystem*

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die dazugehörige homogene Gleichung lautet $y' = Ay$. Mit $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A ist $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$. Die Eigenwerte sind damit $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 1$. Die entsprechenden Eigenvektoren bestimmen sich zu $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit bekommen wir als eine Fundamentallösung $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{6t} & e^t \\ -3e^{6t} & e^t \end{pmatrix}$. Die Inverse bestimmt sich zu $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ 3e^{-6t} & 2e^{-6t} \end{pmatrix}$. Damit gilt für die Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= \Phi(t)(\Phi^{-1}(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds) \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2te^t + \frac{17}{5}e^t - \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{41}{10}e^{6t} \\ -3te^t - \frac{33}{5}e^t + \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{41}{10}e^{6t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 47 *Neumannsche Reihe*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|A\| < 1$. Zeigen Sie, dass $I - A$ invertierbar ist und gilt:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Lösung

Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}$. Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ eine Cauchy-Reihe und somit konvergent. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} (I - A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n \\ &= I. \end{aligned}$$

Analog sehen wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} A^n(I-A) = I$. Also folgt, dass $I-A$ invertierbar ist mit $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

— bitte wenden —