KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
06.02.2014

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 48 ***Laplace-Operator in Kugelkoordinaten***

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $v(r,\varphi,\theta) := u(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$. Zeigen Sie die folgende Darstellung des Laplace-Operators Δ:
Für $(x,y,z) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$ gilt:

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r v(r,\varphi,\theta)) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi,\theta) + \frac{1}{r^2\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\partial_\theta v(r,\varphi,\theta)).$$

Lösung
Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\partial_r v &= \partial_x u\cos\varphi\cos\theta + \partial_y u\sin\varphi\cos\theta + \partial_z u\sin\theta\\
\partial_{rr} v &= \partial_{xx} u\cos^2\varphi\cos^2\theta + \partial_{yy} u\sin^2\varphi\cos^2\theta + \partial_{zz} u\sin^2\theta\\
&\quad + 2\partial_{xy} u\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + 2\partial_{xz} u\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 2\partial_{yz} u\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\\
\partial_\varphi v &= -\partial_x ur\sin\varphi\cos\theta + \partial_y ur\cos\varphi\cos\theta\\
\partial_{\varphi\varphi} v &= \partial_{xx} ur^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \partial_{yy} ur^2\cos^2\varphi\cos^2\theta - 2\partial_{xy} ur^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta\\
&\quad - \partial_x ur\cos\varphi\cos\theta - \partial_y ur\sin\varphi\cos\theta\\
\partial_\theta v &= -\partial_x ur\cos\varphi\sin\theta - \partial_y ur\sin\varphi\sin\theta + \partial_z ur\cos\theta\\
\partial_{\theta\theta} v &= \partial_{xx} ur\cos^2\varphi\sin^2\theta + \partial_{yy} ur^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \partial_{zz} ur^2\cos^2\theta\\
&\quad + 2\partial_{xy} ur^2\sin\varphi\cos\theta\sin^2\theta - 2\partial_{xz} ur^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta - 2\partial_{yz} ur^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\\
&\quad - \partial_x ur\cos\varphi\cos\theta - \partial_y ur\sin\varphi\cos\theta - \partial_z ur\sin\theta.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r v(r,\varphi,\theta)) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi,\theta) + \frac{1}{r^2\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\partial_\theta v(r,\varphi,\theta)) = \partial_{xx}u + \partial_{yy}u + \partial_{zz}u = \Delta u.$$

Aufgabe 49 ***Radialsymmetrische Lösungen der Poisson-Gleichung***

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung:

$$-\Delta u(x) = 1$$

Lösung
Radialsymmetrische Funktionen haben die Form $u(x) = g(\|x\|)$ mit einer Funktion g. Es

— bitte wenden —

gilt $\partial_j u(x) = g'(\|x\|)\frac{x_j}{\|x\|}$ und $\partial_{jj}u(x) = g''(\|x\|)\frac{x_j^2}{\|x\|^2} + g'(\|x\|)(\frac{1}{\|x\|} + \frac{x_j^2}{\|x\|^3})$. Damit erhalten wir $\Delta u(x) = g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|}g'(\|x\|)$. Das führt auf die Gleichung $g''(r) + \frac{n-1}{r}g'(r) = -1$. Mit Substitution $y := g'$ kommen wir auf die Gleichung $y' = \frac{1-n}{r}y - 1$. Dies ist eine inhomogene lineare Gleichung 1. Ordnung. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich zu $y(r) = -\frac{1}{n}r + cr^{1-n}$. Damit ist $g(r) = -\frac{1}{4}r^2 + c\ln r + d$ für $n = 2$ und $g(r) = -\frac{1}{2n}r^2 + c\frac{1}{1-2n}r^{2-n} + d$ für $n \neq 2$.

Aufgabe 50 *Separationsansatz*

Führen Sie einen Separationsansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ für das folgende Problem durch:

$$\begin{aligned}
&\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, (t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi,\pi) \\
&u(t,\pi) = u(t,-\pi), u_x(t,\pi) = u_x(t,-\pi), t \in \mathbb{R} \\
&u(0,x) = f(x), u_t(0,x) = g(x), x \in (-\pi,\pi),
\end{aligned}$$

wobei $f, g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen.

Lösung

Wir suchen nach nicht trivialen Lösungen der Gestalt $u(t,x) = v(t)w(x)$. Einsetzen in die Gleichung ergibt $v''(t)w(x) - v(t)w''(x) = 0$ und daher $\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi,\pi)$. Also muss es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit $\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
v''(t) &= \lambda v(t), t \in \mathbb{R} \\
w''(x) &= \lambda w(x), x \in (-\pi,\pi).
\end{aligned}$$

Wir nehmen an $\lambda > 0$. In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung $w(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Die Randbedingung $u(t,\pi) = u(t,-\pi)$ impliziert $w(\pi) = w(-\pi)$. Die Randbedingung $u_x(t,\pi) = u_x(t,-\pi)$ impliziert $w'(\pi) = w'(-\pi)$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} + be^{\sqrt{\lambda}\pi} \\
\sqrt{\lambda}ae^{\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda}be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= \sqrt{\lambda}ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda}be^{\sqrt{\lambda}\pi}
\end{aligned}$$

Es folgt $a = 0 = b$ und damit $w = 0$, was auf eine triviale Lösung führt. Daher gehen wir von $a \leqslant 0$ aus.
Für $\lambda = 0$ ergibt sich $w(x) = ax + b$. Wegen $w(\pi) = w(-\pi)$ ist $a = 0$. Also $w(x) = b$ und analog $v(t) = ct + d$ für gewisse $b, c, d \in \mathbb{R}$. Damit folgt $u(t,x) = Bt + D$.
Sei nun $\lambda < 0$. Dann folgt $w(x) = a\sin(\sqrt{\lambda}x) + b\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Die Randbedingungen liefern:

$$\begin{aligned}
a\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) &= -a\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) \\
a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) - b\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) &= a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\sin(\sqrt{-\lambda}\pi).
\end{aligned}$$

Ist $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) \neq 0$, so folgt $a = 0 = b$ und damit $w = 0$. Also muss $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$ sein. Analog folgt $v(t) = c\sin(\sqrt{-\lambda}t) + d\cos(\sqrt{-\lambda}t)$. Insgesamt ergibt sich mit $k = \sqrt{-\lambda}$:

$$u(t,x) = A\sin(kx)\sin(kt) + B\sin(kx)\cos(kt) + C\cos(kx)\sin(kt) + D\cos(kx)\cos(kt).$$

In diesem Fall gilt $u(0,x) = B\sin(kx) + D\cos(kx), u_t(0,x) = Ak\sin(kx) + Ck\cos(kx)$. Es muss also gelten, damit die Anfangsbedingung erfüllt ist:

$$u(0,x) = f(x)$$
$$u_t(0,x) = g(x).$$

Wir nehmen an, dass sich f und g durch ihre Fourier-Reihen darstellen lassen, also $f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$ und $g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(g)\cos(kx) + b_k(g)\sin(kx))$. Um das zu erfüllen, überlagern wir die oben gefundenen Lösungen und machen den Ansatz $u(t,x) = B_0 t + D_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\sin(kx)\sin(kt) + B_k\sin(kx)\cos(kt) + C_k\cos(kx)\sin(kt) + D_k\cos(kx)\cos(kt))$. Koeffizientenvergleich liefert dann $B_0 = \frac{a_0(g)}{2}, D_0 = \frac{a_0(f)}{2}, A_k = b_k(g)/k, B_k = b_k(f), C_k = a_k(g)/k, D_k = a_k(f)$.