KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
13.02.2014

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 51 *d'Alembertsche Lösungsformel*

Wir betrachten das Cauchy-Problem für die eindimensionale homogene Wellengleichung für $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$
$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), x \in \mathbb{R}.$$

a) Transformieren Sie die Gleichung in eine Transportgleichung, indem Sie $u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u$ ausnutzen und $v := u_t - u_x$ setzen;

b) Lösen Sie die sich ergebende Gleichung und beweisen Sie die *d'Alembert'sche Lösungsformel*:

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x - t) + f(x + t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy,$$

indem Sie ausnutzen, dass v ebenso einer Transportgleichung genügt;

c) Sei $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle $x > R$, wobei $R > 0$. Zeigen Sie, dass $u(t, x) = 0$ für $t > R$ sowie für $|x| \notin [t - R, t + R]$ (*Huygens-Prinzip*);

d) Skizzieren Sie das von der Anfangsbedingung f beeinflusste Gebiet ind $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Wichtige Termine:

- Die **Klausur** zur Vorlesung findet am Donnerstag, 06.03.2014, von 11.00 bis 13.00 Uhr statt.
- Der **Anmeldesschluss** für die Klausur ist Freitag, 07.02.2014.