KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis 13.02.2014
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 51 ***d'Alembertsche Lösungsformel***

Wir betrachten das Cauchy-Problem für die eindimensionale homogene Wellengleichung für $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$
$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in \mathbb{R}.$$

a) Transformieren Sie die Gleichung in eine Transportgleichung, indem Sie $u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u$ ausnutzen und $v := u_t - u_x$ setzen;

b) Lösen Sie die sich ergebende Gleichung und beweisen Sie die *d'Alembert'sche Lösungsformel*:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy,$$

indem Sie ausnutzen, dass v ebenso einer Transportgleichung genügt;

c) Sei $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle $x > R$, wobei $R > 0$. Zeigen Sie, dass $u(t,x) = 0$ für $t > R$ sowie für $|x| \notin [t-R, t+R]$ (*Huygens-Prinzip*);

d) Skizzieren Sie das von der Anfangsbedingung f beeinflusste Gebiet ind $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Lösung
Es gilt $u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u$. Wir setzen $v := (\partial_t - \partial_x)u$ und erhalten $v_t + v_x = 0$. Dies ist eine eindimensionale homogene Transportgleichung. Ihre Lösung ist gegeben durch $v(t,x) = a(x-t)$ mit $a(x) := v(x,0) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = g(x) - u_x(x,0)$. Die Funktion u genügt der Gleichung $u_t(x,t) - u_x(x,t) = v(x,t) = a(x-t)$, welche eine

inhomogene Transportgleichung ist. Ihre Lösung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u(x+t) + \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds \\
&= f(x+t) + \int_0^t a(x+t-2s)ds \\
&= f(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy \\
&= f(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (g(y)-u_x(y,0))dy \\
&= \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy.
\end{aligned}$$

Dies ist die d'Alembertsche Lösungsformel.
Sei nun $g=0$. Dann haben wir $u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t))$. Gilt nun $f(x)=0$ für $|x|>R$, so ist $u(x,t)=0$, wenn $|x+t|,|x-t|>R$. Ist nun $t>R$ und gilt $|x|\notin[t-R,t+R]$, so gilt $|x|>t+R$ oder $|x|<t-R$ und somit $|x|-t>R$ oder $|x|-t<-R$. Folglich gilt $||x|-|t||=||x|-t|>R$. Es folgt wegen $||x|-|t||\leqslant|x-t|$ und $||x|-|t||\leqslant|x+t|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung), dass $|x+t|,|x-t|>R$ ist, und somit $u(x,t)=0$.