KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis 31.10.213
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 5 *Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y' = 2\ln(\sin x)\cot(x)y, x \in (0, \pi/2)$;

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y' = (x + \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}})y, x \in [0, 1)$;

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{1}{1+\tan^2 x}y' = e^{\tan x}y, y(0) = 1, x \in [0, \pi/2)$;

d) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f \in C(I)$ und $x_0 \in I$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(x)y$ in I, $y(x_0) = y_0$, eine eindeutige Lösung hat.

Aufgabe 6 *Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*

a) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung $y' = -2y\cos x + \cos x$.

i) Bestimmen Sie alle Lösungen mit der Methode der Variation der Konstanten;

ii) Finden Sie eine (möglichst einfache) partikuläre Lösung y_0 und bestimmen Sie sodann alle Lösungen der Gleichung.

b) An eine Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator mit Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine sinusförmige Spannung $u(t) = \sin(\omega t)$ angelegt. Wie lautet der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung u_C, der Stromstärke i sowie der am ohmschen Widerstand abfallenden Teilspannung u_R?

Aufgabe 7 *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:
$y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}, x > 0$;

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:
$x^2y' - xy = x^2\sin(\frac{y}{x}), y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 8 ***Zusammenhang zwischen Differential- und Integralgleichungen***

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y'' + g(t, y) = 0, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$, mit $g \in C(D)$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $(0, y_0) \in D$, äquivalent zur Integralgleichung $y(t) = y_0 + z_0 t - \int_0^t (t - \tau) g(\tau, y(\tau)) d\tau$ ist.

b) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Integralgleichung $y(t) = e^{it} + \alpha \int_t^\infty \sin(t - s) \frac{y(s)}{s^2} ds$ die Differentialgleichung $y'' + (1 + \alpha/t^2) y = 0$ erfüllt.

c) Wir betrachten die homogene lineare Gleichung $y' = f(x)y$ mit $f \in C([0, \infty))$ und der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Picard-Iteration, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems durch $y(x) = y_0 \exp(\int_0^x f(t) dt)$ gegeben ist.

Hinweis: Es gelten:

1)

$$\int_0^t \int_0^s g(\tau, \varphi(\tau)) d\tau ds = \int_0^t (\int_\tau^t ds) g(\tau, \varphi(\tau)) d\tau = \int_0^t (t - \tau) g(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

2)

$$\frac{d}{dt} \int_0^t H(t, s) ds = H(t, t) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) ds.$$

3) Die Picard-Iteration für $y' = g(x, y), y(0) = y_0$ ist gegeben durch $y_0 := y_0, y_{n+1}(x) := y_0 + \int_0^x g(s, y_n(s)) ds$. Die auf diese Wiese definierte Funktionenfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Lösung des Anfangswertproblems.

4) Für $f \in C([0, \infty))$ und $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1}$ gilt:

$$\int_0^{t_0} dt_1 f(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 f(t_2) \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f(t_n) = \frac{1}{n!} (\int_0^{t_0} dt f(t))^n.$$

Wichtige Termine:

- Die **Übungsklausur** findet am Samstag, 01.02.2014, von 08.00 bis 10.00 Uhr statt.
- Die **Klausur** zur Vorlesung findet am Donnerstag, 06.03.2014, von 11.00 bis 13.00 Uhr statt.
- Der **Anmeldesschluss** für die Klausur ist Freitag, 07.02.2014. Für die Teilnahme an der Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.