KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
31.10.213

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 5 ***Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung***

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y' = 2\ln(\sin x)\cot(x)y, x \in (0, \pi/2)$;

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y' = (x + \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}})y, x \in [0, 1)$;

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{1}{1+\tan^2 x}y' = e^{\tan x}y, y(0) = 1, x \in [0, \pi/2)$;

d) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f \in C(I)$ und $x_0 \in I$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(x)y$ in I, $y(x_0) = y_0$, eine eindeutige Lösung hat.

Lösung

a) Es handelt sich hierbei um eine lineare homogene Gleichung 1. Ordnung. Die allgemeine Lösung auf $(0, \pi/2)$ ist gegeben durch $y(x) = C\exp(\int_{x_0}^{x} f(t)dt)$ mit $f(t) := 2\ln(\sin t)\cot(t)$, $x_0 \in (0, \pi/2)$ beliebig. Es gilt $\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{d}{dt}\ln(\sin t)$. Es folgt $2\ln(\sin t)\cot(t) = 2\ln(\sin t)\frac{d}{dt}\ln(\sin t) = \frac{d}{dt}\ln^2(\sin t)$. Es ergibt sich $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = [\ln^2(\sin t)]_{x_0}^{x} = \ln^2(\sin x) - \ln^2(\sin x_0)$. Damit lautet die allgemeine Lösung der Gleichung $y(x) = C\exp((\ln^2(\sin x) - \ln^2(\sin x_0)))$. Wir können insbesondere $x_0 = \pi/2$ wählen. Dann erhalten wir die allgemeine Lösung $y(x) = C\exp(\ln^2(\sin x)) = C(\exp(\ln(\sin x)))^{\ln(\sin x)} = C(\sin x)^{\ln(\sin x)}$.

b) Mit $f(t) := t + \frac{2\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ lautet die allgemeine Lösung $y(x) = C\exp(\int_{x_0}^{x} f(t)dt)$. Wegen $\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ haben wir $f(t) = t + 2\arcsin(t)\frac{d}{dt}\arcsin(t) = t + \frac{d}{dt}\arcsin^2(t) = \frac{d}{dt}(t^2/2 + \arcsin^2(t))$. Damit folgt $y(x) = C\exp(x^2/2 + \arcsin^2(x) - x_0^2/2 - \arcsin^2(x_0))$. Wir setzen $x_0 := 0$ und erhalten $y(x) = C\exp(x^2/2 + \arcsin^2(x))$.

c) Wir formen die Gleichung um und erhalten $y' = (1+\tan^2(x))e^{\tan x}y$. Mit $\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$ erkennen wir $(1 + \tan^2(x))e^{\tan x} = \frac{d}{dx}e^{\tan x}$. Für die allgemeine Lösung erhalten wir somit $y(x) = C\exp(e^{\tan x})$. Um das Anfangswertproblem zu lösen setzen wir ein $1 = y(0) = C\exp(e^{\tan 0}) = Ce$. Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems $y(x) = \frac{1}{e}\exp(e^{\tan x})$.

— bitte wenden —

d) Die allgemeine Lösung von $y' = f(x)y$ lautet $y(x) = C\exp(\int_p^x f(t)dt$ mit einem $p \in I$ und einem $C \in \mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erhalten wir $y_0 = C\exp(\int_p^{x_0} f(t)dt)$ und somit $C = y_0 \exp(-\int_p^{x_0} f(t)dt)$. Es folgt $y(x) = y_0 \exp(\int_{x_0}^x f(t)dt)$.
Wir nehmen an, es gibt eine weitere Lösung $h \in C^1(I)$. Aufgrund der Form der allgemeinen Lösung gibt es dann ein $A \in \mathbb{R}$ und ein $q \in I$ mit $h(x) = A\exp(\int_q^x f(t)dt)$. Mit der Anfangesbedingung folgt $A = y_0 \exp(-\int_q^{x_0} f(t)dt)$ und somit $h(x) = y_0 \exp(\int_{x_0}^x f(t)dt) = y(x)$.
Bemerkung: Anders kann man die Eindeutigkeit auch mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen. Dazu definieren wir $F(x, y) := f(x)y, x \in I, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| = |f(x)| \cdot |y_1 - y_2|$. Da I kompakt und $f \in C(I)$, gibt es ein $L \geqslant 0$ mit $|f(x)| \leqslant L, x \in I$. Somit genügt F einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L. Also ist das Anfangswertproblem $y' = f(x)y = F(x, y), y(x_0) = y_0$ eindeutig lösbar f.a. $y_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 ***Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung***

a) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung $y' = -2y\cos x + \cos x, x \geqslant 0$.

i) Bestimmen Sie alle Lösungen mit der Methode der Variation der Konstanten;

ii) Finden Sie eine (möglichst einfache) partikuläre Lösung y_0 und bestimmen Sie sodann alle Lösungen der Gleichung.

b) An eine Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator mit Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine sinusförmige Spannung $u(t) = \sin(\omega t)$ angelegt. Wie lautet der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung u_C, der Stromstärke i sowie der am ohmschen Widerstand abfallenden Teilspannung u_R?

Lösung

a) Wir bestimmen die allgemeine Lösung der zu dieser Gleichung gehörigen homogenen Gleichung $y' = -2\cos(x)y$. Diese ist $y_0(x) = C\exp(-2\int_0^x \cos(t)dt) = C\exp(-2\sin(x))$.

i) Die Methode der Variation der Konstanten liefert für eine spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= (\int_0^x \frac{\cos(t)dt}{y_0(t)})y_0(x) \\
&= e^{-2\sin x} \int_0^x \cos(t)e^{2\sin t}dt \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\sin x} \int_0^x \frac{d}{dt}e^{2\sin t}dt \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\sin x}(e^{2\sin x} - 1) \\
&= \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sin x}).
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung lautet somit $y(x) = Ce^{-2\sin(x)} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sin x}) = Ae^{-2\sin(x)} + \frac{1}{2}$.

ii) Man kann die spezielle Lösung $y_p(x) = \frac{1}{2}$ anhand der Gleichung leicht erraten oder sie als konstante Lösung bestimmen. Dann kommt man auf die allgemeine Lösung $y(x) = Ce^{-2\sin(x)} + \frac{1}{2}$.

b) Die Maschenregel besagt $u_R + u_C = u$. Für die Stromstärke i gilt $i = dQ/dt = d(Cu_c)/dt = Cu_c'$. Ferner gilt $u_R = iR$. Es folgt $u = Ri + u_C = RCu_c' + u_c$. Wir erhalten für $y := u_c$ die Differentialgleichung $y' = -\tau y + \tau u$, wobei $\tau := \frac{1}{RC}$. Die homogene Lösung ist $y_0(t) = Ce^{-\tau t}$. Eine spezielle Lösung finden wir mit der Methode der Variation der Konstanten:

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= y_0(t) \int_0^t \frac{\tau u(s)}{y_0(s)} ds \\
&= \tau e^{-\tau t} \int_0^t \sin(\omega s) e^{\tau s} ds \\
&= \tau e^{-\tau t} [\frac{e^{\tau s}}{\tau^2 + \omega^2}(\tau \sin(\omega s) - \omega \cos(\omega s))]_0^t \\
&= \frac{\tau e^{-\tau t}}{\tau^2 + \omega^2}(e^{\tau t}(\tau \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) + \omega) \\
&= \frac{\tau(\tau \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) + \omega e^{-\tau t})}{\tau^2 + \omega^2}.
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung ist somit $y(t) = y_0(t) + y_p(t) = Ce^{-\tau t} + \frac{\tau(\tau \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) + \omega e^{-\tau t})}{\tau^2 + \omega^2}$. Oder, da $C \in \mathbb{R}$ beliebig, $y(t) = Ce^{-\tau t} + \frac{\tau(\tau \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t))}{\tau^2 + \omega^2}$ (wir haben $C \to C + \frac{\omega}{\tau^2+\omega^2}$ ersetzt). Mit $y(0) = 0$ folgt $0 = C - \frac{\omega\tau}{\tau^2+\omega^2}$ und somit $C = \frac{\tau^2+\omega^2}{\omega\tau}$. Der zeitliche Verlauf des Spannungsabfalls am Kondensator ist also gegeben durch:

$$u_C(t) = \frac{\tau^2 + \omega^2}{\omega\tau} e^{-\tau t} + \frac{\tau(\tau \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t))}{\tau^2 + \omega^2}.$$

Die Stromstärke errechnet sich zu:

$$i(t) = Cu_C'(t) = -C\frac{\tau^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\tau t} + C\frac{\tau(\tau\omega \cos(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t))}{\tau^2 + \omega^2}.$$

Schließlich ergibt sich für den Spannungsabfall am ohmschen Widerstand:

$$u_R(t) = Ri(t) = -RC\frac{\tau^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\tau t} + RC\frac{\tau(\tau\omega \cos(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t))}{\tau^2 + \omega^2}.$$

Hinweis: Es gilt $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin(bx) - b \cos(bx))$. Um solche Integrale zu berechnen, kann man sin über exp ausdrücken: $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Aufgabe 7 *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:
$y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}, x > 0;$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:
$x^2y' - xy = x^2\sin(\frac{y}{x}), y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

Lösung

a) Wir setzen $u := y/x$ und erhalten $u' = \frac{1}{x}e^{-u}$. Dies ist eine Gleichung mit getrennten Variablen, deren allgemeine Lösung implizit durch $\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{e^{-t}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t}$ gegeben ist. Es folgt $e^{u(x)} - e^{u(x_0)} = \ln\frac{x}{x_0}$. Somit ist $e^{u(x)} = \ln(x) + c$ mit $c := e^{u(x_0)} - \ln(x_0)$. Wir folgern $u(x) = \ln(\ln(x) + c)$. Es ergibt sich $y(x) = x\ln(\ln(x) + c)$.

b) Wir dividieren beide Seiten durch x^2 und erhalten $y' = \sin(y/x) + y/x$. Für $u := y/x$ ergibt sich $u' = \frac{1}{x}\sin(u)$. Für den Anfangswert erhalten wir $u(1/2) = \frac{y(1/2)}{1/2} = 2y(1/2) = \frac{\pi}{2}$. In der Aufgabe 2a), Übungsblatt 1, haben wir für dieses Anfangswertproblem die Lösung $u(x) = 2\arctan(2x)$ gefunden. Damit folgt $y(x) = 2x\arctan(2x)$.

Aufgabe 8 ***Zusammenhang zwischen Differential- und Integralgleichungen***

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y'' + g(t,y) = 0, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$, mit $g \in C(D)$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $(0, y_0) \in D$, äquivalent zur Integralgleichung $y(t) = y_0 + z_0t - \int_0^t (t-\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau$ ist.

b) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Integralgleichung $y(t) = e^{it} + \alpha\int_t^\infty \sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds$ die Differentialgleichung $y'' + (1 + \alpha/t^2)y = 0$ erfüllt.

c) Wir betrachten die homogene lineare Gleichung $y' = f(x)y$ mit $f \in C([0,\infty))$ und der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Picard-Iteration, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems durch $y(x) = y_0\exp(\int_0^x f(t)dt)$ gegeben ist.

Lösung

a) Sei y eine Lösung von $y'' + g(t,y) = 0, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$. Mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung erhalten wir $y'(s) - y'(0) = -\int_0^s g(\tau, y(\tau))d\tau$ und somit $y'(s) = z_0 - \int_0^s g(\tau, y(\tau))d\tau$. Nochmalige Anwendung diesen Satzes ergibt $y(t) - y(0) = z_0t - \int_0^t\int_0^s g(\tau, y(\tau))d\tau ds = z_0t - \int_0^t (t-\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau$ (s. ***Hinweis 1***). Somit ist y eine Lösung von $y(t) = y_0 + z_0t - \int_0^t (t-\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau$.
Sei $y \in C(I)$ eine Lösung von $y(t) = y_0 + z_0t - \int_0^t (t-\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau$. Dann ist $y(0) = y_0$. Dann ist $y \in C^1(I)$ und es gilt $y'(t) = z_0 - \frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau$. Mit $H(t,\tau) := (t-\tau)g(\tau, y(\tau))$ und ***Hinweis 2*** ergibt sich $\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau = H(t,t) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial t}(t,\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau, y(\tau))d\tau$. Also gilt $y'(t) = z_0 - \int_0^t g(\tau, y(\tau))d\tau$. Somit ist y' stetig differenzierbar mit $y''(t) = -\frac{d}{dt}\int_0^t g(\tau, y(\tau))d\tau = -g(t, y(t))$. Ferner gilt $y'(0) = z_0$. Dies zeigt, dass y eine Lösung von $y'' + g(t,y) = 0, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$ ist.

b) Wegen ***Hinweis 2*** gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_t^\infty H(t,s)ds &= -\frac{d}{dt}\int_\infty^t H(t,s)ds\\ &= -H(t,t) - \int_\infty^t \frac{\partial H}{\partial t}(t,s)ds\\ &= -H(t,t) + \int_t^\infty \frac{\partial H}{\partial t}(t,s)ds.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\int_t^\infty \sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds &= \frac{d}{dt}(-\sin(t-t)\frac{y(t)}{t^2} + \int_t^\infty \cos(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds)\\ &= \frac{d}{dt}\int_t^\infty \cos(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds\\ &= -\cos(t-t)\frac{y(t)}{t^2} - \int_t^\infty \sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds\\ &= -\frac{y(t)}{t^2} - \int_t^\infty \sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds.\end{aligned}$$

Wir folgern:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(e^{it} + \alpha\int_t^\infty \sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2})ds &= -e^{it} - \alpha\frac{y(t)}{t^2} - \alpha\int_t^\infty \sin(t-s)\frac{y(s)}{s^2}ds\\ &= -y(t) - \alpha\frac{y(t)}{t^2}\\ &= y''(t).\end{aligned}$$

Also gilt $y'' + (1+\alpha/t^2)y = 0$.

c) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Picard-Iterationsfolge, d.h. $y_0(x) = y_0, y_{n+1}(x) = y_0 + \int_0^x f(t)y_n(t)dt$. Wir zeigen mit Induktion, dass $y_n(x) = y_0\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}(\int_0^x f(s)ds)^k$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ gilt $y_0(x) = y_0$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $y_n(x) = y_0\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}(\int_0^x f(s)ds)^k$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_0^x f(t)y_n(t)dt\\ &= y_0 + \int_0^x f(t)y_0\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}(\int_0^t f(s)ds)^k\\ &= y_0 + y_0\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\int_0^x f(t)(\int_0^t f(s)ds)^k dt.\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{k+1}(\int_0^t f(s)ds)^{k+1} = (\int_0^t f(s)ds)^k f(t).$$

Also:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)(\int_0^t f(s)ds)^k dt &= \int_0^x \frac{d}{dt}\frac{1}{k+1}(\int_0^t f(s)ds)^{k+1}dt\\ &= \frac{1}{k+1}(\int_0^x f(s)ds)^{k+1}.\end{aligned}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}y_{n+1}(x) &= y_0 + y_0\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\int_0^x f(t)(\int_0^t f(s)ds)^k dt\\ &= y_0 + y_0\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}(\int_0^x f(t)dt)^{k+1}\\ &= y_0 + y_0\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}(\int_0^x f(t)dt)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}(\int_0^x f(t)dt)^k.\end{aligned}$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $y_n(x) = y_0\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(\int_0^x f(s)ds)^k$. Und somit $y_n(x) \to \exp(\int_0^x f(t)dt), n \to \infty$.