KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

WS 2013/2014
07.11.213

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 9 *Zur Wiederholung*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen/Anfangswertprobleme:

a) $(x^3+1)y' = 3x^2y$;

b) $xy' + 2y = 4x^2, y(1) = 0$;

c) $y' = -y + \cos x$;

d) $x^2y' - xy = x^2e^{y/x}$.

Lösung

a) Bei $(x^3+1)y' = 3x^2y$ handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir formen um und erhalten $\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{x^3+1} = \frac{d}{dx}\ln(x^3+1)$. Es folgt $y = C(x^3+1)$.

b) Beim Anfangswertproblem $xy' + 2y = 4x^2, y(1) = 0$ haben wir eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = -\frac{2}{x}y + 4x$. Die allgemeine homogene Lösung ergibt sich zu $y_0(x) = C\exp(-\int \frac{2}{x}dx) = C\exp(-2\ln x) = Cx^{-2}$. Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch $y_p(x) = y_0(x)\int \frac{4x}{y_0(x)}dx = x^{-2}\int 4x^3dx = x^{-2}\int \frac{d}{dx}x^4dx = x^2$. Daher lautet die allgemeine Lösung der Gleichung $y(x) = Cx^{-2} + x^2$. Einsetzen des Anfangswerts liefert $0 = y(1) = C + 1$ und somit $C = -1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $y(x) = -x^{-2} + x^2$.

c) $y' = -y + \cos x$ ist eine lineare inhomogene Gleichung 1. Ordnung. Die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung ist offensichtlich $y_0(x) = Ce^{-x}$. Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch $y_p(x) = y_0(x)\int \frac{\cos x}{y_0(x)}dx = e^{-x}\int \cos(x)e^x dx$. Um das Integral zu berechnen, benutzen wir $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Es folgt $\int \cos(x)e^xdx = \frac{1}{2}(\int e^{x(1+i)}dx + \int e^{x(1-i)}dx) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i}e^{(1-i)x})$. Damit ist $y_p(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+i}e^{ix} + \frac{1}{1-i}e^{-ix}) = \frac{1}{4}((1-i)e^{ix} + (1+i)e^{-ix}) = \frac{1}{4}(2\cos x + 2\sin x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. Die allgemeine Lösung ergibt sich folglich zu $y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

d) Nach Umformen erhalten wir $y' = y/x + e^{y/x}$. Das ist eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung. Wir setzen $f(t) := t + e^t, u := y/x$ und erhalten $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u) = \frac{1}{x}e^u$. Es folgt $\int e^{-u}du = \ln x + C$ und somit $-e^{-u} = \ln x + C$. Daraus ergibt sich $u(x) = -\ln(-\ln x - C)$ und damit $y(x) = -x\ln(-\ln x - C)$.

Aufgabe 10 ***Bernoulli-Gleichung***

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen vom Bernoulli-Typ:

a) $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$;

b) $3y' + y = \frac{1}{y^2}$;

c) $xy' + 2y = -x^3 \cos(x) y^2$.

Lösung
Bei einer Bernoullischen Gleichung $y' + h(x)y = q(x)y^\alpha$ liegt es nahe, den Term $y' + h(x)y$ so zu erweitern, dass man Ableitung einer Funktion der Gestalt $u(x) = \mu(x)y(x)$ hat. Dazu muss dieser Term mit einer Funktion μ multipliziert werden, sodass $(\mu y)' = \mu y' + (\mu)'y = \mu y' + \mu(x)h(x)y$. Es muss also $(\mu)' = h(x)\mu$ (Gleichung mit getrennten Variablen) gelten und somit $\mu(x) = \exp(\int h(x)dx)$. Man kommt also auf $u' = \mu(x)q(x)y^\alpha = (\mu)^{1-\alpha}q(x)(\mu(x)y(x))^\alpha = (\mu(x))^{1-\alpha}q(x)u^\alpha$. Dies ist eine Gleichung mit getrennten Variablen, die man hoffentlich lösen kann. Hat man u, so folgt $y(x) = \frac{u(x)}{\mu(x)}$. Wir führen nun diese Schritte für unsere Gleichungen durch.

a) $y' + 2xy = e^{x^2} y^2$: Das ist eine Bernoullische Gleichung mit $\alpha = 2, h(x) = 2x, q(x) = e^{x^2}$. Somit haben wir $\mu(x) = \exp(\int h(x)dx) = e^{x^2}$. Mit $u := \mu y$ folgt $u' = e^{x^2} e^{x^2} y^2 = (e^{x^2} y)^2 = u^2$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ergibt sich aus $\int \frac{du}{u^2} = \int dx = x + C$. Also $-u^{-1} = x + C$, sodass $u(x) = \frac{1}{-x+C}$. Es ergibt sich $y(x) = u(x)/\mu(x) = \frac{1}{(-x+C)e^{x^2}}$.

b) $y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}y^{-2}$: Hier haben wir $\mu(x) = \exp(\int \frac{dx}{3}) = \exp(\frac{x}{3})$. Mit $u := \mu y$ kommen wir auf $u' = \frac{1}{3}\mu(x)y^{-2} = \frac{1}{3}\mu^3(x)(\mu(x)y)^{-2} = \frac{1}{3}\mu^3(x)u^{-2} = \frac{e^x}{3}u^{-2}$. Integration liefert $\int u^2 du = \int \frac{e^x dx}{3} = \frac{1}{3}e^x + C$. Also $\frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}e^x + C$. Daraus ergibt sich $u(x) = (e^x + C)^{1/3}$ und $y(x) = u(x)/\mu(x) = e^{-x/3}(e^x + C)^{1/3}$.

c) $y' + \frac{2}{x}y = -x^2 \cos(x) y^2$: Hier haben wir $\mu(x) = \exp(\int \frac{2dx}{x}) = \exp(2 \ln x) = x^2$. Mit $u := \mu y$ haben wir $u' = -x^2 \mu(x) \cos(x) y^2 = -x^2 \mu^{-1}(x) \cos(x)(\mu(x)y)^2 = -x^2 x^{-2} \cos(x) u^2 = -\cos(x)u^2$. Es folgt $\int \frac{du}{u^2} = -u^{-1} = -\int \cos x dx = -\sin x + C$. Somit ist $u(x) = \frac{1}{\sin x + C}$ und $y(x) = u(x)/\mu(x) = \frac{1}{x^2(\sin x + C)}$.

Aufgabe 11 ***Picard-Iteration***

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = xy, y(0) = 1$. Bestimmen Sie die Lösung y dieses Anfangswertproblems. Berechnen Sie die Picard-Iterationsfolge (y_n) zu dieser Gleichung und deren Grenzwert.

Lösung
Die Gleichung $y' = xy$ hat die allgemeine Lösung $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingung finden wir die Lösung des Anfangswertproblems $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$. Wir vergleichen diese Lösung mit dem Grenzwert der Picard-Iteration. Wir setzen $y_0(x) := 1$ und $y_{n+1}(x) := 1 + \int_0^1 t y_n(t) dt$. Die ersten Terme der Iteration lauten dann $y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2, y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4, y_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6, \ldots$ Wir vermuten

$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2}x^2)^k$. Wir führen Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ gilt offenbar die Aussage. Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \geqslant 1$ gilt. Dann:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x t y_n(t) dt \\
&= 1 + \int_0^x t \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2}t^2)^k dt \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2})^k \int_0^x t^{2k+1} dt \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2})^k \frac{1}{2(k+1)}(x^2)^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}(\frac{1}{2})^{k+1}(x^2)^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2})^k (x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2}x^2)^k.
\end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner gilt $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2}x^2)^k \to e^{\frac{1}{2}x^2}, n \to \infty$.

Aufgabe 12 *Lipschitz-Bedingung*

Gegeben seien das Rechteck $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ und der Streifen $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1, y \in \mathbb{R}\}$. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Lipschitz-Stetigkeit bzgl. y in R bzw. S:

a) $f_1(x, y) := x^2 y$;

b) $f_2(x, y) := xy^3$;

c) $f_3(x, y) := xy^2$;

d) $f_4(x, y) := x^2 + 2y$.

Lösung

a) Es gilt $|f_1(x, y) - f_1(x, z)| = |x^2 y - x^2 z| = x^2 |y - z| \leqslant |y - z|$ für $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Daher ist f_1 Lipschitz-stetig bzgl. y in R und in S.

b) $|f_2(x, y) - f_2(x, z)| = |x||y^3 - z^3| \leqslant |y^3 - z^3| = |y - z||y^2 + yz + z^2|$. In R gilt $|y^2 + yz + z^2| \leqslant |y^2| + |xy| + |z^2| \leqslant 3$ und somit $|f_2(x, y) - f_2(x, z)| \leqslant 3|y - z|$. f_2 ist in R also Lipschitz-stetig bzgl. y. Nun betrachten wir die Folge $((1, n))_{n \in \mathbb{N}}$ in S. Es gilt $|f_2(1, n) - f_2(1, 0)| = n^3$. Daher ist $|f_2(1, n) - f_2(1, 0)|/n = n^2 \to \infty, n \to \infty$. Wäre f_2 jedoch Lipschitz-stetig auf S, gäbe es ein L mit $|f_2(1, n) - f_2(1, 0)| \leqslant Ln$ und somit $|f_2(1, n) - f_2(1, 0)|/n$ beschränkt.

c) $|f_3(x,y) - f_3(x,z)| = |x||y^2 - z^2| \leqslant |y^2 - z^2| = |y+z||y-z| \leqslant (|y| + |z|)|y-z| \leqslant 2|y-z|$ auf R. Somit ist f_2 Lipschitz-stetug auf R. Analoge Überlegung wie bei b) zeigt, dass f_3 nicht Lipschitz-stetig auf S ist.

d) $|f_4(x,y) - f_4(x,z)| = 2|y-z|$ ist Lipschitz-stetig auf R und auf S.