Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
26.10.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' + y - y^3 = 0$ mit $y(0) = \frac{1}{2}$.

b) $y' = y^2 - (2x+1)y + 1 + x + x^2$ mit $y(0) = \frac{1}{3}$.

Lösungsvorschlag

a) Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 3$. Wir setzen daher $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-2}$. Dann erhalten wir für z die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = 2z(x) - 2.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörige homogenen Differentialgleichung $z'(x) = 2z(x)$ ist gegeben durch $z(x) = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten c lässt sich nun eine spezielle Lösung ermitteln. Wir machen den Ansatz $z(x) = c(x)e^{2x}$ und setzen ihn in die inhomogene Differentialgleichung ein. Damit erhalten wir $c'(x) = -2e^{-2x}$, also $c(x) = e^{-2x}$ und somit $z_p(x) = 1$. Also erhalten wir als allgmeine Lösung

$$z(x) = 1 + ce^{2x} \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{2x}}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ impliziert $c = 3$. Somit ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2x}}}$ die gesuchte Lösung.

b) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Riccatische Differentialgleichung. Eine partikuläre Lösung y_p mit

$$y_p(x) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ kann man erraten. Setze $z = u - y_p$. Dann erfüllt u genau dann die Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x) - y_p'(x) \\ &= y^2(x) - y_p^2(x) - (2x+1)(y(x) - y_p(x)) \\ &= (y(x) - y_p(x))(y(x) + y_p(x)) - (2x+1)z(x) \\ &= z(x)(z(x) + 2y_p(x)) - (2x+1)z(x) \\ &= z^2(x) - z(x) \end{aligned}$$

erfüllt.

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung. Für den Anfangswert gilt

$$z(0) = y(0) - y_p(0) = \frac{1}{3} > 0.$$

Deswegen interessieren wir uns zunächst für Lösungen $z > 0$. Für solche darf man die Differentialgleichung für z durch $z^2(x)$ dividieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$\frac{z'(x)}{z^2(x)} = 1 - \frac{1}{z(x)}.$$

Definiere $w(x) = \frac{1}{z(x)}$. Wegen $z > 0$ ist w differenzierbar mit $w'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$. Die obige Differentialgleichung lautet dann

$$-w'(x) = 1 - w(x).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für w. Eine partikuläre Lösung $w_p = 1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung w_h der homogenen Gleichung ist durch

$$w_h(x) = Ce^x$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $w(x) = w_h(x) + w_p(x) = 1 + Ce^x$. Durch die Anfangsbedingung $w(0) = \frac{1}{z(0)} = 3$ wird $C = 2$ festgelegt. Damit ist $w(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$z(x) = \frac{1}{w(x)} = \frac{1}{1 + 2e^x}, \qquad \text{bzw.} \qquad y(x) = y_p(x) + z(x) = x + \frac{1}{1 + 2e^x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das obige y ist die eindeutige, nicht weiter fortsetzbare Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

Aufgabe 2 (Tutorium)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = -\frac{1}{2x}\frac{y^2-6y+5}{y-3}$ mit $y(1) = 2$.

b) $y' = e^{x-y-e^y}$ mit $y(1) = 0$.

c) $y' = \frac{1}{1-x}y + x - 1$ mit $y(0) = 0$.

d) $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{1}{x^3+x}$ mit $y(1) = 1$.

Lösungsvorschlag

a) Nach Separation erhalten wir für $x \neq 0$

$$\int \frac{2y-6}{y^2-6y+5}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \quad \log|y^2 - 6y + 5| = -\log|x| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Nun wenden wir die Exponentialfunktion an und lösen den Betrag auf. Dies führt auf

$$y^2 - 6y + 5 = c_2\frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad (y-3)^2 = c_2\frac{1}{x} + 4, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist daher gegeben durch

$$y(x) = 3 \pm \sqrt{c_2 \frac{1}{x} + 4}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir durch Einsetzen des Anfangswertes. Mit $y(1) = 2$ erhalten wir $c_2 = -3$ sowie ein negatives Vorzeichen vor der Wurzel (da sonst die Anfangsbedingung verletzt wäre). Die Lösung lautet also

$$y(x) = 3 - \sqrt{4 - \frac{3}{x}} \quad \text{für } x > \frac{3}{4}.$$

b) Wir formen zunächst die Differentialgleichung um:

$$y'(x)e^{y(x)}e^{e^{y(x)}} = e^x.$$

Die linke Seite ist gerade die Ableitung von $e^{e^{y(x)}}$. Integration liefert daher

$$e^{e^{y(x)}} = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nach Umformen erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = \log(\log(e^x + c)), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für $x = 1$ ist $\log(\log(e^1 + c)) = 0$ genau dann wenn $c = 0$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblemes

$$y(x) = \log(\log(e^x)) = \log(x) \quad \text{für } x > 0.$$

c) Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' = \frac{1}{1-x}y$ ist gegeben durch

$$y_h(x) = c\exp(-\log(x-1)) = c\frac{1}{x-1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung für die inhomogene Differentialgleichung bekommen wir mit Variation der Konstanten: Setzen wir den Ansatz $y(x) = c(x)\frac{1}{x-1}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir $c'(x) = (x-1)^2$, also $c(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3$. Eine spezielle Lösung ist damit gegeben durch $y_p = \frac{1}{3}(x-1)^2$. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}(x-1)^2, \quad \text{für } x \neq 1, c \in \mathbb{R}.$$

Wegen $y(0) = -c + \frac{1}{3} = 0$ genau für $c = \frac{1}{3}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{(x-1)^2}{3}, \qquad x \in (-\infty, 1).$$

d) Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' = -\frac{3}{x}y$ lautet

$$y_h(x) = c\exp(-3\log(x)) = c\frac{1}{x^3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz für die Variation der Konstanten lautet also $y(x) = c(x)\frac{1}{x^3}$. Wir setzen den Ansatz in die Differentialgleichung ein und erhalten $c'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$. Also ist $c(x) = x - \arctan(x)$ und damit $y_p(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)$ eine spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x), \quad \text{für } x \neq 0, c \in \mathbb{R}.$$

Wegen $y(1) = c + 1 - \arctan(1) = 1$ genau für $c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \frac{\pi}{4x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\arctan(x)}{x^3}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Aufgabe 3 (Übung)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$(\sin(x) + \sinh(y))\,\mathrm{d}x + \cosh(y)\,\mathrm{d}y = 0 \text{ mit } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

b) Finden Sie einen integrierenden Faktor $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf einer möglichst großen, einfach zusammenhängenden Menge $D \ni \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, der nur von x abhängt.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem in impliziter Form.

d) Geben Sie die explizite Lösung des Anfangswertproblems auf einem möglichst großen Intervall $I \ni \frac{\pi}{4}$ an.

Lösungsvorschlag

Setze $P(x,y) = \sin(x) + \sinh(y)$, $Q(x,y) = \cosh(y)$.

a) Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cosh(y) \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Differentialgleichung nicht exakt.

b) Einsetzen des Ansatzes $\mu(x,y) = \mu(x)$ in die Vertauschbarkeitsbedingung liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)(\sin(x) + \sinh(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)\cosh(y) \\ \Leftrightarrow \cosh(y)m(x) &= \mu'(x)\cosh(y) \\ \overset{\cosh(y)\geq 1}{\Leftrightarrow} \quad \mu'(x) &= \mu(x). \end{aligned}$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist $\mu(x) = e^x$. Wegen $\mu(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ist μ tatsächlich ein integrierender Faktor auf der offenen, sternförmigen Menge $D = \mathbb{R}^2$. Offensichtlich ist $D \ni \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ maximal.

Sei $\tilde{P}(x,y) = \mu(x)P(x,y) = e^x(\sin(x) + \sinh(y))$ und $\tilde{Q}(x,y) = \mu(x)Q(x,y) = e^x\cosh(y)$. Dann ist die Differentialgleichung

$$\tilde{P}(x,y)\,\mathrm{d}x + \tilde{Q}(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

exakt und auf D zur ursprünglichen Gleichung äquivalent.

c) Gesucht ist eine Stammfunktion von

$$\begin{pmatrix}\tilde{P}\\ \tilde{Q}\end{pmatrix}(x,y) = e^x\begin{pmatrix}\sin(x)+\sinh(y)\\ \cosh(y)\end{pmatrix}$$

auf D. Sei $(x,y)\in\mathbb{R}$. Definiere $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) = t\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\quad\forall t\in[0,1].\qquad\text{Dann}\qquad \gamma'(t)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\quad\forall t\in[0,1].$$

Eine gesuchte Stammfunktion F erhält man (siehe Satz 19.23 (3) aus HM 2) durch

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_\gamma \begin{pmatrix}\tilde{P}\\ \tilde{Q}\end{pmatrix}\cdot\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \begin{pmatrix}e^{xt}\sin(xt)+\sinh(yt)\\ e^{xt}\cosh(yt)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 xe^{xt}\sin(xt)+xe^{xt}\sinh(yt)+e^{xt}y\cosh(yt))\,\mathrm{d}t\\
&= \underbrace{\int_0^1 xe^{xt}\sin(xt)\,\mathrm{d}t}_{=:I_1}+\Big[e^{xt}\sinh(yt)\Big]_{t=0}^1 = I_1+e^x\sinh(y).
\end{aligned}$$

Das Integral I_1 berechnen wir über

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \underbrace{xe^{xt}}_{u'}\underbrace{\sin(xt)}_{v}\,\mathrm{d}t = \Big[e^{xt}\sin(xt)\Big]_{t=0}^1-\int_0^1 \underbrace{xe^{xt}}_{u'}\underbrace{\cos(xt)}_{v}\,\mathrm{d}t\\
&= e^x\sin(x)-\Big[e^{xt}\cos(xt)\Big]_{t=0}^1-\underbrace{\int_0^1 xe^{xt}\sin(xt)\,\mathrm{d}t}_{=I_1} = e^x(\sin(x)-\cos(x))+1-I_1\\
\Rightarrow I_1 &= e^x\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$\tilde{F}(x,y) = F(x,y)-\frac{1}{2} = e^x\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}+\sinh(y)\right)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ eine gesuchte Stammfunktion.
Die Lösungen des ursprünglichen Anfangswertproblems sind implizit durch

$$e^x\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}+\sinh(y)\right) = \tilde{F}(x,y) = \tilde{F}\left(\frac{\pi}{4},0\right) = 0.$$

d) Die implizite Gleichung lässt sich für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nach y auflösen. Man erhält

$$y(x) = \operatorname{Arsinh}\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Tutorium)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme bzw. geben Sie bei **c)** die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an:

a) $y' = x(y + y^2)$ mit $y(0) = 1$.

b) $y^3 - \frac{1}{3x^2+3} + xy^2y' = 0$ mit $y(1) = 1$.

c) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$.

Lösungsvorschlag

a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = 2$). Wegen $y(0) = 1$, interessieren wir uns zunächst für Lösungen $y > 0$. Für solche darf man die Differentialgleichung durch $-y^2(x)$ dividieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$-\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -x\left(\frac{1}{y(x)} + 1\right).$$

Definiere $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. Wegen $y > 0$ ist z definiert und differenzierbar mit $z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$. Die obige Gleichung lautet dann

$$z' = -x(z + 1).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für z. Eine partikuläre Lösung $z_p(x) = -1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung z_h der homogenen Gleichung ist durch

$$z_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $z(x) = z_p(x) + z_h(x) = -1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Durch die Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$ wird $C = 2$ festgelegt. Es gilt

$$z(t) > 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} > -\log(2) \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2\log(2)} := x_0.$$

Also ist die Lösung y der ursprünglichen Gleichung zumindest auf dem Intervall $I = (-x_0, x_0)$ existent und eindeutig durch

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{2e^{-\frac{x^2}{2}} - 1}$$

für alle $x \in I$ gegeben. Wegen

$$\lim_{x \to -x_0+} y(x) = \lim_{x \to x_0-} y(x) = \infty$$

ist sie weder nach links noch nach rechts weiter fortsetzbar.

b) Wir teilen die Gleichung durch $xy(x)^2$ und erhalten

$$y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{3x^3 + 3x}y(x)^{-2},$$

also eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = -2$. Setzen wir $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^3$, so finden wir die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = -\frac{3}{x}z(x) + \frac{1}{x^3 + x}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nach Aufgabe 2 d) gegeben durch $z(x) = c\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)$. Nach Resubstitution erhalten wir

$$y(x) = \left(c\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)\right)^{1/3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ liefert $c = \frac{\pi}{4}$. Damit ist schließlich

$$y(x) = \left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\arctan(x)\right)^{1/3}, \quad \text{für } x > 0,$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

c) Zunächst bestimmen wir eine spezielle Lösung der Gleichung mit dem gegebenen Ansatz $y_0(x) = e^{ax}$. Einsetzen liefert

$$(a-1)e^{ax} = e^{(2a-1)x} - e^x,$$

und für $a = 1$ gilt Gleichheit. Somit ist $y_0(x) = e^x$ eine Lösung der Gleichung.

Die weiteren Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung bekommen wir nun mit dem Ansatz $u := y - y_0 = y - e^x$. Dieser liefert für die Funktion u die Gleichung

$$u'(x) = (1 + 2y_0(x)e^{-x})u(x) + e^{-x}u(x)^2 \qquad \text{also} \qquad u'(x) = 3u(x) + e^{-x}u(x)^2.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir $z(x) := u(x)^{1-\alpha} = u(x)^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$z'(x) = -3z(x) - e^{-x}.$$

Die homogene Gleichung $z'(x) = -3z(x)$ hat die allgemeine Lösung $z_h(x) = ce^{-3x}$, $c \in \mathbb{R}$, und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ als spezielle Lösung der inhomogen Gleichung. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z(x) = ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Nun ermitteln wir die Nullstellen von z. Aus $z(\xi) = 0$ folgt $e^{2\xi} = 2c$. Für $c \leq 0$ hat z also keine Nullstelle, für $c > 0$ ist $\xi = \frac{\log(2c)}{2}$ die einzige Nullstelle von z.

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir also durch

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}}$$

eine Lösung von $u' = 3u + e^{-x}u^2$, wobei $x \in \mathbb{R}$ falls $c \leq 0$ und $x \in (-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ oder $x \in (\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ falls $c > 0$ gilt. Zusammen mit $u \equiv 0$ sind dies alle Lösungen von $u' = 3u + e^{-x}u^2$.

Für die ursprüngliche Gleichung haben wir also die Lösungen

$$y_0(x) = e^x \qquad \text{und} \qquad y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^{-3x} - e^{-x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

auf den entsprechenden Intervallen $\mathbb{R}$ oder $(-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ bzw. $(\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ je nach Wahl von c.

Aufgabe 5 (Übung/Tutorium)

Bei der Bewegung eines Körpers in Luft tritt bekannterweise ein Luftwiderstand auf. Aus der Strömungsmechanik wissen wir, dass die Luftwiderstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist und durch die Formel

$$F_W = -\frac{1}{2} c_W \rho A v^2$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet c_W den Strömungswiderstandskoeffizienten, ρ die Dichte der Luft und A die projektive Querschnittsfläche des bewegten Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung. Der Strömungswiderstandskoeffizient c_W ist eine dimensionslose Größe, die abhängig von der Gestalt des Körpers ist und experimentell bestimmt werden muss.

Stellen Sie Differentialgleichungen für die Geschwindigkeit v auf, welche die Bewegung

a) in horizontaler Richtung

b) in vertikaler Richtung

unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes beschreiben und berechnen Sie jeweils die Lösung für die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Gehen Sie in beiden Fällen davon aus, dass c_W, ρ und A konstant sind und keine weiteren äußeren Kräfte den Körper beeinflussen außer der Gewichtskraft und der Luftwiderstandskraft.

Lösungsvorschlag

Im Folgenden sei stets $k := \frac{1}{2} c_W \rho A$.

a) In horizontaler Richtung wirkt auf den Körper nur die Luftwiderstandskraft, die damit der resultierenden Gesamtkraft entspricht. Damit gilt

$$\begin{aligned} & F_{ges} = F_W \\ \iff \quad & ma = -kv^2 \\ \iff \quad & v' = -\frac{k}{m} v^2. \end{aligned}$$

Mittels Trennung der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{1}{v^2}\, \mathrm{d}v = -\frac{k}{m} t + c \quad \text{also} \quad v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m} t - c}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und mit $v(0) = v_0$ schließlich

$$v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0}}.$$

Insbesondere ist $v \equiv 0$, falls $v_0 = 0$.

b) Im Gegensatz zur Bewegung in horizontaler Richtung wirkt hier neben F_W auch die Gewichtskraft F_g. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_W + F_g \\ \iff \quad ma &= -kv^2 + mg \\ \iff \quad v' &= -\frac{k}{m}v^2 + g. \end{aligned}$$

Dies ist eine Riccatische Differentialgleichung. Um diese zu lösen, benötigen wir zunächst eine spezielle Lösung dieser Gleichung. Durch Umformen der Gleichung für v finden wir

$$v' = -\frac{k}{m}(v^2 - \frac{m}{k}g).$$

Nehmen wir versuchsweise an, dass v konstant ist, erkennen wir, dass $v_\infty := \sqrt{\frac{mg}{k}}$ eine (konstante) Lösung der Gleichung ist. Anschaulich ist dies die Geschwindigkeit, bei der sich Luftreibung und Erdanziehungskraft gegenseitig kompensieren und der Körper mit konstanter Geschwindigkeit fällt.

Der Ansatz $u := v - v_\infty$ führt uns auf die Bernoullische Differentialgleichung

$$u' = -2\frac{k}{m}v_\infty u - \frac{k}{m}u^2.$$

Durch eine erneute Substitution $z := u^{-1}$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung

$$z' = 2\frac{k}{m}v_\infty z + \frac{k}{m}.$$

Für eine *lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*, d.h. $y' = ay+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ kann man leicht nachrechnen, dass $y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $c \in \mathbb{R}$, die Lösung dieser Gleichung ist.

Daher ist $z(t) = z_0 \exp(2\frac{k}{m}v_\infty t) - \frac{1}{2v_\infty}$, $z_0 \in \mathbb{R}$, die Lösung der Gleichung für z. Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$v(t) = v_\infty - \frac{2v_\infty}{c_0 \exp(2\frac{k}{m}v_\infty t) + 1}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ führt schließlich auf $c_0 = \frac{v_\infty + v_0}{v_\infty - v_0}$ und somit auf die Lösung

$$v(t) = v_\infty - \frac{2v_\infty(v_\infty - v_0)}{(v_\infty + v_0)\exp(2\frac{k}{m}v_\infty t) + v_\infty - v_0}.$$