Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
06.11.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 6 (Übung)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\tan(xy) + xy + x^2y' = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{6}$$

in expliziter Form mit Hilfe eines Eulerschen Multiplikators, der nur von xy abhängt.

Lösungsvorschlag

Mit $P(x,y) := \tan(xy) + xy$ und $Q(x,y) := x^2$ erhalten wir

$$\partial_y P(x,y) = 2x + x\tan^2(xy) \neq 2x = \partial_x Q(x,y),$$

also ist die Differentialgleichung nicht exakt. Multiplikation mit dem Eulerschen Multiplikator $\mu(x,y) := u(xy)$ und anschließendem Ableiten führt auf

$$\begin{aligned}\partial_y\Big(\mu(x,y)P(x,y)\Big) &= xu'(xy)(\tan(xy) + xy) + u(xy)(2x + x\tan^2(xy)),\\ \partial_x\Big(\mu(x,y)Q(x,y)\Big) &= yu'(xy)x^2 + 2xu(xy).\end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$u'(xy) + \tan(xy)u(xy) = 0 \quad \overset{t:=xy}{\Longleftrightarrow} \quad u'(t) = -\tan(t)u(t).$$

Eine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist $u(t) = \cos(t)$. Damit ist $\mu(x,y) = \cos(xy)$ ein integrierender Faktor und die neue exakte Differentialgleichung lautet

$$\Big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(x^2\cos(xy)\Big)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Zu dieser bestimmen wir nun eine Stammfunktion F. Integration von μQ bezüglich y liefert

$$F(x,y) = x\sin(xy) + c(x),$$

und anschließendes Ableiten nach x und Gleichsetzen mit μP führt auf $c'(x) = 0$, d.h. c ist konstant. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch $F(x,y) = x\sin(xy) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $F(1, \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = c$. Die implizite Lösung ist daher gegeben durch

$$x\sin(xy) = \tfrac{1}{2}.$$

Auflösen nach y liefert die explizite Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{x}\arcsin(\tfrac{1}{2x}), \quad \text{für } x > \tfrac{1}{2}$$

(beachte, dass arcsin bei $x = 1$ nicht differenzierbar ist und daher $x = \frac{1}{2}$ nicht zum Definitionsinterall der Lösung gehört).

Aufgabe 7 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{2x}{1+x^2+y^2}x'(t) + \frac{8y}{1+x^2+y^2}y'(t) = 0, \quad (x(0), y(0)) = (1,0)$$

in impliziter Form mit Hilfe eines Eulerschen Multiplikators, der nur von $x^2 + y^2$ abhängt. Beschreiben Sie die Lösungsmenge geometrisch.

Lösungsvorschlag

Es handelt sich um eine spezielle Form der Differentialgleichung

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Setze $P(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$ und $Q(x,y) = \frac{8y}{1+x^2+y^2}$. Untersuche die Differentialgleichung auf Exaktheit: Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-16xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

für alle $xy \neq 0$. Also ist die Differentialgleichung nicht exakt.
Wir machen einen Ansatz für einen integrierenden Faktor $\mu(x,y) = \rho(x^2+y^2)$. In der Schreibweise der Vorlesung ist also $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ und es gilt

$$\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q} = \frac{\frac{-12xy}{(1+x^2+y^2)^2}}{2y\frac{2x}{1+x^2+y^2} - 2x\frac{8y}{1+x^2+y^2}} = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

für alle $xy \neq 0$. Da dieser Ausdruck nur von $x^2 + y^2$ abhängt, ist ρ die Lösung von

$$\rho'(t) = \frac{1}{1+t}\rho(t),$$

also zum Beispiel $\rho(t) = 1 + t$, womit $\mu(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ folgt. Es gilt

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c_2(y), \quad \int 8y\,\mathrm{d}y = 4y^2 + c_1(x).$$

Also ist $F(x,y) = x^2 + 4y^2$ eine Stammfunktion von $\begin{pmatrix}\mu P\\ \mu Q\end{pmatrix}$.
Damit ist die Differentialgleichung genau dann gelöst, wenn F konstant ist und die Konstante ist gegeben durch $F(x(0), y(0) = F(1,0) = 1$

$$x(t)^2 + (2y(t))^2 = 1 \geq 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit der großen Halbachse 1 und der kleinen Halbachse $\frac{1}{2}$. Die Lösung beschreibt demnach einen Teil dieser Ellipse.

Aufgabe 8 (Übung)

a) Bestimmen Sie eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, welche

$$\{y_1(x) = \mathrm{e}^x,\ y_2(x) = \cos(2x)\}$$

als Fundamentalsystem besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie die Wronski-Determinante.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2+1)\mathrm{e}^x.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für eine Lösung der homogenen Gleichung.

Lösungsvorschlag

a) Wir suchen zwei Funktionen p und q, sodass y_1 und y_2 die homogene lineare Differentialgleichung $y'' + py' + qy = 0$ lösen. Dann erfüllt die Wronski-Determinante

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} w'(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)\big(-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)\big) - y_2(x)\big(-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)\big) \\ &= -p(x)\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) \\ &= -p(x)w(x). \end{aligned}$$

Für $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = \cos(2x)$ gilt dann

$$\begin{aligned} w(x) &= -2e^x\sin(2x) - e^x\cos(2x), \\ w'(x) &= -5e^x\cos(2x). \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$p(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{5\cos(2x)}{\cos(2x) + 2\sin(2x)}.$$

Setzen wir y_1 in die Gleichung ein, so erhalten wir für q

$$e^x + p(x)e^x + q(x)e^x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q(x) = -1 - p(x) = \frac{4\cos(2x) - 2\sin(2x)}{\cos(2x) + 2\sin(2x)}.$$

Als Differentialgleichung erhalten wir schließlich

$$\big(\cos(2x) + 2\sin(2x)\big)y'' - 5\cos(2x)y' + \big(4\cos(2x) - 2\sin(2x)\big)y = 0.$$

b) Durch Einsetzen des Ansatzes in die homogene Gleichung sieht man leicht, dass die Gleichung für $a = 1$ erfüllt ist und somit $u(x) = \mathrm{e}^x$ eine Lösung ist. Nun können wir das Reduktionsverfahren von d'Alembert anwenden, um die allgemeine Lösung zu finden. Der Ansatz $y(x) = w(x)u(x)$

führt auf

$$\begin{aligned} xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y &= x(w''u + 2w'u' + wu'') - (2x+1)(w'u + wu') + (x+1)uw \\ &= xe^x w'' - e^x w' \stackrel{!}{=} (x^2+1)e^x. \end{aligned}$$

D.h. $v := w'$ erfüllt die Gleichung $v' = \frac{1}{x}v + x + \frac{1}{x}$. Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $v_{\text{hom}}(x) = c\exp\Big(\int 1/x \, \mathrm{d}x\Big) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung erhalten wir nun mittels Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz $y(x) = c(x)x$. Einsetzen liefert

$$c'(x)x = x + \tfrac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad c'(x) = 1 + \tfrac{1}{x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad c(x) = x - \tfrac{1}{x} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

D.h. $v_p(x) = (x - \frac{1}{x})x = x^2 - 1$ ist ein spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v ist somit gegeben durch

$$v(x) = x^2 - 1 + cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für w erhalten wir damit $w(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + c_1x^2 + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, und als allgemeine Lösung schließlich

$$y(x) = w(x)u(x) = (\tfrac{1}{3}x^3 - x)e^x + c_1x^2e^x + c_2e^x, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9 (Tutorium)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y'(x) - \frac{2}{1-x^2}y(x) = 0$ für $0 < x < 1$.

Hinweis: $u(x) = x$ löst die Differentialgleichung.

b) $y''(x) - \Big(4 + \frac{2}{x}\Big)y'(x) + \Big(4 + \frac{4}{x}\Big)y(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ für $x > 0$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für eine Lösung der homogenen Gleichung.

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Man erkennt, dass $u(x) = x$ eine Lösung ist.

Um die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz (Verfahren von d'Alembert) $y(x) = v(x)u(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
y''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y'(x) - \frac{2}{1-x^2}y(x) &= v''(x)u(x) + 2v'(x)u'(x) + v(x)u''(x) + \\
&\quad \frac{2x}{1-x^2}(v'(x)u(x) + v(x)u'(x)) - \\
&\quad \frac{2}{1-x^2}v(x)u(x) \\
&= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) + \frac{2x}{1-x^2}u(x)\right] + \\
&\quad \underbrace{v(x)\left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{2x}{1-x^2}u(x)\right]}_{=0} \\
&= 0 \\
\overset{x>0}{\Leftrightarrow} v''(x) + 2v'(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v'. Es gilt

$$\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\log(x) \text{ und } \int \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\log(1-x^2)$$

auf $I = (0,1)$. Damit ist $v'(x) = C\frac{1-x^2}{x^2} = C\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v'. Unbestimmte Integration liefert

$$v(t) = C_1\left(\frac{1}{x} + x\right) + C_2$$

als allgemeine Lösung für v. Damit ist $y(x) = C_1(1+x^2) + C_2 x$ für alle $0 < x < 1$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Wir machen zunächst einen Ansatz, um eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung zu finden:

$$u(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
u''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)u'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)u(x) &= \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} - \left(4 + \frac{2}{x}\right)\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + \left(4 + \frac{4}{x}\right)\mathrm{e}^{\lambda x} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{1}{x}(4 - 2\lambda)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow (\lambda-2)^2 + 2\frac{2-\lambda}{x} = (2-\lambda)\left(2 - \lambda + \frac{2}{x}\right) &= 0 \\
\Leftarrow 2 &= \lambda
\end{aligned}$$

Also ist $u(x) = e^{2x}$ eine partikuläre Lösung der obigen Differentialgleichung.

Um die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz (Verfahren von d'Alembert) $y(x) = v(x)u(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
y''(x) - \left(4+\frac{2}{x}\right)y'(x) + \left(4+\frac{4}{x}\right)y(x) &= v''(x)u(x) + 2v'(x)u'(x) + v(t)u''(x) - \\
&\quad \left(4+\frac{2}{x}\right)(v(x)u'(x) + v'(x)u(x)) + \\
&\quad \left(4+\frac{4}{x}\right)v(x)u(x) \\
&= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) - \left(4+\frac{2}{x}\right)u(x)\right] + \\
&\quad v(x)\underbrace{\left[u''(x) - \left(4+\frac{2}{x}\right)u'(x) + \left(4+\frac{4}{x}\right)u(x)\right]}_{=0} \\
&= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) + \left(4-\frac{2}{x}\right)u(x)\right] \overset{!}{=} 2e^{2x} \\
\overset{u(x)>0}{\Leftrightarrow} v''(x) + v'(x)\left[\underbrace{\frac{2u'(x)}{u(x)}}_{=4} - \left(4+\frac{2}{x}\right)\right] &= v''(x) - \frac{2}{x}v'(x) \overset{!}{=} 2
\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v'. Es gilt

$$\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\log(x), \qquad \text{sowie} \qquad \int \frac{1}{x^2}2\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x}.$$

Also ist

$$v'(x) = Cx^2 - 2x$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v'. Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1x^3 - x^2 + C_2$$

als allgemeine Lösung für v. Damit ist

$$y(x) = C_1x^3e^{2x} + C_2e^{2x} - x^2e^{2x}$$

für alle $x > 0$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 10 (Übung)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen der Differentialgleichung

a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x + 6e^{-x}$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

b) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}\sin(x), \quad y(0) = \frac{3}{5}, \quad y'(0) = 1.$

Lösungsvorschlag

Bei allen Aufgabenteilen handelt es sich um (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Für die jeweilige homogene Gleichung machen wir hier stets den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

a) Um die vorliegende inhomogene Gleichung zu lösen, berechnen wir zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und machen anschließend einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite*. Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung ist

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3,$$

d.h. wir haben die dreifache Nullstelle $\lambda = -1$. Als Fundamentalsystem erhalten wir damit

$$\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$$

und als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Bei inhomogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Inhomogenität $p(x)e^{\sigma x}\cos(\omega x)$ oder $p(x)e^{\sigma x}\sin(\omega x)$ können wir eine spezielle Lösung mit dem Ansatz

$$y_p(x) = q_1(x)x^ke^{\sigma x}\cos(\omega x) + q_2(x)x^ke^{\sigma x}\sin(\omega x)$$

finden, wobei q_1 und q_2 Polynome von gleichem Grad wie p sind und k die Vielfachheit der Nullstelle $\sigma + i\omega$ im charakteristischen Polynom ist (d.h. der Ausdruck x^k in obigem Ansatz fällt weg, falls $\sigma + i\omega$ keine Nullstelle ist). Tritt nun eine *Summe* aus Inhomogenitäten der obigen Form auf, so bilden wir die *Summe* der jeweiligen Ansätze. Ein Ansatz dieser Art heißt *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

In unserem Fall wählen wir also den Ansatz: $y_p(x) = ax + b + cx^3e^{-x}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hier gilt

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a + ce^{-x}(-x^3 + 3x^2), \\ y_p''(x) &= ce^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x), \\ y_p'''(x) &= ce^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$y_p'''(x) + 3y_p''(x) + 3y_p'(x) + y_p(x) = ax + (3a + b) + 6ce^{-x} \overset{!}{=} x + 6e^{-x},$$

d.h. mit $a = 1, b = -3, c = 1$ erhalten wir $y_p(x) = x - 3 + x^3e^{-x}$ als spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = x - 3 + x^3e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Wie bei Teilaufgabe a) berechnen wir zuerst die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die homogene Gleichung $y'' - 2y' + 2y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet somit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Als Ansatz für eine spezielle Lösung machen wir hier den Ansatz

$$y_p(x) = ae^{2x} \cos(x) + be^{2x} \sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (2a + b)e^{2x} \cos(x) + (-a + 2b)e^{2x} \sin(x), \\ y_p''(x) &= (3a + 4b)e^{2x} \cos(x) + (-4a + 3b)e^{2x} \sin(x). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = (a + 2b)e^{2x} \cos(x) + (-2a + b)e^{2x} \sin(x) \stackrel{!}{=} e^{2x} \sin(x) \iff a + 2b = 0 \ \wedge\ -2a + b = 1.$$

Als Lösung erhalten wir daraus $a = -\frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$ und damit $y_p(x) = -\frac{2}{5}e^{2x} \cos(x) + \frac{1}{5}e^{2x} \sin(x)$, sowie

$$y(x) = -\tfrac{2}{5}e^{2x} \cos(x) + \tfrac{1}{5}e^{2x} \sin(x) + c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Zur Lösung des Anfangswertproblems leiten wir zunächst ab und erhalten

$$y'(x) = \tfrac{4}{5}e^{2x} \sin(x) - \tfrac{3}{5}e^{2x} \cos(x) + (-c_1 + c_2)e^x \sin(x) + (c_1 + c_2)e^x \cos(x).$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen führt uns schließlich auf

$$y(0) = \tfrac{3}{5} \iff c_1 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} \iff c_1 = 1,$$

und

$$y'(0) = 1 \iff -\tfrac{3}{5} + (1 + c_2) = 1 \iff c_2 = \tfrac{3}{5}.$$

Die Lösung ist damit gegeben durch

$$y(x) = \tfrac{1}{5}e^{2x}\Big(\sin(x) - 2\cos(x)\Big) + \tfrac{1}{5}e^x\Big(3\sin(x) + 5\cos(x)\Big).$$

Aufgabe 11 (Tutorium)

a) In der Vorlesung wurde die homogene Lösung der Gleichung

$$y^{(8)} + y^{(7)} - 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + 10y^{(4)} - 4y''' - 4y'' + 12y' + 8y = h(x)$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda + 2)(\lambda - (1 + \mathrm{i}))^2(\lambda - (1 - \mathrm{i}))^2$$

besprochen. Welcher Ansatz ist für die partikuläre Lösung zu wählen, falls $h(x)$ durch

(i) $\mathrm{e}^x \sin(x)$ (ii) e^{-x} (iii) $x^3\mathrm{e}^x\sin(x)$ (iv) $(x^4+4x)\mathrm{e}^{-x}$
(v) $\sin(x)$ (vi) e^{-2x} (vii) $(x^2+1)\sin(x)$ (viii) x^4

gegeben ist?

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = \sinh(x)$$

mit $y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{3}{4}$ und $y''(0) = -1$.

Lösungsvorschlag

a) Der Ansatz für die partikuläre Lösung mit Inhomogenität $h(x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x)$ (bzw. $\cos(\omega x)$ statt $\sin(\omega x)$) lautet

$$y_p(x) = x^\nu[\tilde{q}(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) + \tilde{r}(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x)],$$

wobei $\tilde{q}$ und $\tilde{r}$ Polynome mit maximal dem Grad von q sind und ν die Vielfachheit der Nullstelle $\sigma + \mathrm{i}\omega$ des charakteristischen Polynoms (Null ist möglich).

(i) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = \omega = 1$. Da $1+\mathrm{i}$ eine zweifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x^2[A\mathrm{e}^x\sin(x) + B\mathrm{e}^x\cos(x)].$$

(ii) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = -1$, $\omega = 0$. Da -1 eine dreifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = Ax^3\mathrm{e}^{-x}.$$

(iii) Es ist $q(x) = x^3$, $\sigma = \omega = 1$. Da $1+\mathrm{i}$ eine zweifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^2[(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)\mathrm{e}^x\sin(x) + (B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0)\mathrm{e}^x\cos(x)] \\ &= (A_3x^5 + A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2)\mathrm{e}^x\sin(x) + (B_3x^5 + B_2x^4 + B_1x^3 + B_0x^2)\mathrm{e}^x\cos(x) \end{aligned}$$

(iv) Es ist $q(x) = x^4 + 4x$, $\sigma = -1$, $\omega = 0$. Da -1 eine dreifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x^3(A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)\mathrm{e}^{-x} = (A_4x^7 + A_3x^6 + A_2x^5 + A_1x^4 + A_0x^3)\mathrm{e}^{-x}.$$

(v) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = 0$, $\omega = 1$. Da i keine Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)].$$

(vi) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = -2$, $\omega = 0$. Da -2 eine einfache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}.$$

(vii) Es ist $q(x) = x^2 + 1$, $\sigma = 0$, $\omega = 1$. Da i keine Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = (A_2x^2 + A_1x + A_0)\sin(x) + (B_2x^2 + B_1x + B_0)\cos(x).$$

(viii) Es ist $q(x) = x^4$, $\sigma = 0$, $\omega = 0$. Da 0 keine Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0.$$

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom q lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$ von p kann erraten werden. Polynomdivision liefert:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

Damit sind $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ die verbleibenden Nullstellen von p. Alle Nullstellen haben die Vielfachheit 1. Die Funktionen y_1, y_2 und y_3 mit

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \cos(x), \qquad y_3 = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ bilden also ein Fundamentalsystem für die obige Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 1.11 der Vorlesung).

Es gilt $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir suchen zunächst eine partikuläre Lösung y_p^1 für die Inhomogenität $\frac{e^x}{2}$. Dafür machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“ (siehe Abschnitt 1.11 der Vorlesung):

$$y_p^1(x) = Cxe^x$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^1\right]'(x) &= C(x+1)e^x, \\
\left[y_p^1(x)\right]'' &= C(x+1+1)e^x = (x+2)e^x, \\
\left[y_p^1(x)\right]''' &= C(x+3)e^x
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^1\right]'''(x) - \left[y_p^1\right]''(x) + \left[y_p^1(x)\right]' - y_p^1(x) &= \frac{e^x}{2} \\
\overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} C((x+3) - (x+2) + (x+1) - x) &= \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow 2C &= \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow C &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit ist $y_p^1(x) = \frac{x}{4}e^x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung mit der Inhomogenität $\frac{e^x}{2}$.

Nun suchen wir eine partikuläre Lösung y_p^2 für die Inhomogenität $-\frac{e^{-x}}{2}$. Auch dafür machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“ (siehe Abschnitt 1.11 der Vorlesung):

$$y_p^2(x) = Ce^{-x}$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^2\right]'(x) &= -Ce^{-x}, \\
\left[y_p^2(x)\right]'' &= Ce^{-x}, \\
\left[y_p^2(x)\right]''' &= -Ce^{-x}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^2\right]'''(x) - \left[y_p^2\right]''(x) + \left[y_p^2(x)\right]' - y_p^2(x) &= -\frac{e^{-x}}{2} \\
\overset{e^{-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} C(-1-1-1-1) &= -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow C &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Damit ist $y_p^2(x) = \frac{1}{8}e^x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung mit der Inhomogenität $-\frac{e^{-x}}{2}$. Damit löst $y_p = y_p^1 + y_p^2$ die gegebene Differentialgleichung.
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x) + y_p(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit freien Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Diese werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \left[C_1e^x + C_2\cos(x) + C_3\sin(x) + \frac{x}{4}e^x + \frac{1}{8}e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 + C_2 + \frac{1}{8} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow C_1 + C_2 &= \frac{3}{8}, \\
y'(0) &= \left[C_1e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^x - \frac{1}{8}e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 + C_3 + \frac{1}{8} \overset{!}{=} \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow C_1 + C_3 &= \frac{5}{8} \Rightarrow C_3 = C_2 + \frac{1}{4}, \\
y''(0) &= \left[C_1e^x - C_2\cos(x) - C_3\sin(x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{2}{4}\right)e^x + \frac{1}{8}e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 - C_2 + \frac{5}{8} \overset{!}{=} -1 \\
\Leftrightarrow C_1 - C_2 &= -\frac{13}{8} \Rightarrow 2C_1 = -\frac{10}{8}, 2C_2 = \frac{16}{8} \Rightarrow C_3 = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Also ist $y(x) = \cos(x) + \frac{5}{4}\sin(x) + \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{8}\right)e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.