Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
20.11.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 12 (Übung)

Ein Fußball wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vom Erdboden aus senkrecht in die Höhe geschossen. Bezeichnet $r(t)$ seinen Abstand zum Erdmittelpunkt zur Zeit t, so wird seine Bewegung durch

$$r''(t) = -\frac{\gamma M}{r(t)^2}, \quad r(0) = R, \quad r'(0) = v_0,$$

beschrieben, wobei γ die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und R der Erdradius ist.

Wie muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt werden, damit der Ball nicht wieder zur Erde zurückfällt? Berechnen Sie für das kleinste derartige v_0 die Lösung r.

Lösungsvorschlag

Wir multiplizieren die Gleichung mit $2r'$ (wobei wir $r' \neq 0$ annehmen können, da wir keine konstanten Lösungen haben). Dies führt auf

$$2r'r'' = -2r'\tfrac{\gamma M}{r^2}.$$

Führen wir nun eine Integration auf beiden Seiten aus, so erhalten wir $r'^2 = 2\frac{\gamma M}{r} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Randbedinungen führt auf

$$v_0^2 = 2\tfrac{\gamma M}{R} + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = v_0^2 - 2\tfrac{\gamma M}{R}.$$

Dies liefert die Differentialgleichung

$$(r')^2 = 2\tfrac{\gamma M}{r} + v_0^2 - 2\tfrac{\gamma M}{R}.$$

Für $t \to \infty$ fordern wir nun $r(t) \to \infty$, d.h. $v_0^2 - 2\frac{\gamma M}{R} = \lim_{t\to\infty} r'(t)^2 \geq 0$. Das kleinstmögliche v_0 das diese Gleichung noch erfüllt, ist daher gegeben durch

$$v_0 = \sqrt{2\tfrac{\gamma M}{R}} \approx 11,2\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Für dieses v_0 vereinfacht sich obige Differentialgleichung zu $r' = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$. Mit Trennung der Variablen erhalten wir

$$r(t) = \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + c\right)^{2/3}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und $r(0) = R$ führt schließlich auf

$$r(t) = \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}t + R^{3/2}\right)^{2/3}.$$

Aufgabe 13 (Tutorium)

Geben Sie möglichst viele Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an.

a) $y = xy' + \sqrt{y'-1}$,

b) $y = xy' + (y')^2 - 2y' + 1$.

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich um eine Clairaut-Gleichung. Mögliche Lösungen sind gegeben durch die Geradenschar, die entsteht, wenn wir auf der rechten Seite der Gleichung y' durch eine frei wählbare Konstante c ersetzen. Dies liefert die Lösungen

$$y_a = ax + \sqrt{a-1} \qquad \forall a \geqslant 1$$

Eine weitere Lösung finden wir, indem wir y' als Parameter t interpretieren und $x = \psi(t)$, $y = \chi(t)$ als Funktionen dieses Parameters. Die Gleichungen

$$\chi(t) = t\psi(t) + \sqrt{t-1}$$

und

$$\chi'(t) = t\psi'(t)$$

liefern durch Ableiten der ersten und Einsetzen in die zweite, dass

$$x = \psi(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$$

und somit

$$t = \frac{1}{4x^2} + 1.$$

Einsetzen dieser beiden Informationen in die erste Gleichung ergibt

$$y(x) = \chi(t) = x(\frac{1}{4x^2} + 1) + \sqrt{(\frac{1}{4x^2} + 1) - 1} = \begin{cases} x + \frac{3}{4x} & , x > 0, \\ x - \frac{1}{4x} & , x < 0, \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung kommt daher, dass die Wurzel positiv definiert ist und daher die Wurzel aus $\frac{1}{4x^2}$ je nach Vorzeichen von x gerade $\pm\frac{1}{2x}$ ist. erste Teil der Lösung fällt jedoch weg, da dort

$$y'(x) = 1 - \frac{3}{4x^2} < 1$$

gilt und $\sqrt{y'-1}$ aus der DGL somit nicht definiert ist. Die Lösung, die wir erhalten, ist somit

$$y(x) = x - \frac{1}{4x} \qquad \forall x < 0.$$

Da die Geraden y_a die Tangenten an y im Punkt $-\frac{1}{2\sqrt{a-1}}$ sind, können wir für jedes $x_0 < 0$ zwei weitere Lösungen finden, indem wir entweder auf $(-\infty, x_0]$ die Gerade und auf $(x_0, 0)$ die Funktion y oder auf $(-\infty, x_0]$ die Funktion y und auf (x_0, ∞) die Gerade wählen. Im ersten Fall können wir an einem Punkt $x_1 \in (x_0, 0)$ auch wieder auf die nächste Tangente wechseln. Ein

Anfangswertproblem mit der Forderung $y(x_0) = y_0$ ist mit diesen Funktionen nur dann lösbar, wenn $y_0 \geqslant x_0 \geqslant 0$ oder $x_0 < 0$ und $y_0 < x_0 - \frac{1}{4x_0}$. Dies erkennt man schnell durch eine Skizze.

b) Es handelt sich um eine Clairaut-Gleichung. Mögliche Lösungen sind gegeben durch die Geradenschar, die entsteht, wenn wir auf der rechten Seite der Gleichung y' durch eine frei wählbare Konstante c ersetzen. Dies liefert die Lösungen

$$y_a = ax + (a-1)^2 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Eine weitere Lösung finden wir, indem wir y' als Parameter t interpretieren und $x = \psi(t)$, $y = \chi(t)$ als Funktionen dieses Parameters. Die Gleichungen

$$\chi(t) = t\psi(t) + (t-1)^2$$

und

$$\chi'(t) = t\psi'(t)$$

liefern durch Ableiten der ersten und Einsetzen in die zweite, dass

$$x = \psi(t) = -2(t-1)$$

und somit

$$t = 1 - \frac{x}{2}.$$

Einsetzen dieser beiden Informationen in die erste Gleichung ergibt

$$y(x) = \chi(t) = x(1 - \frac{x}{2}) + \frac{x^2}{4} = x - \frac{x^2}{4}.$$

Dies ist eine weiter Lösung für $x \in \mathbb{R}$. Da die Geraden y_a die Tangenten an y im Punkt $2(1-a)$ sind, können wir für jedes $x_0 < 0$ zwei weitere Lösungen finden, indem wir entweder auf $(-\infty, x_0]$ die Gerade und auf (x_0, ∞) die Funktion y oder umgekehrt. Wie oben können wir im ersten Fall auch noch einen zweiten Punkt $x_1 > x_0$ wählen und dort zurück zur Tangente wechseln.

Aufgabe 14 (Übung)

Geben Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an.

a) $x^2 y^{(4)}(x) + 5xy'''(x) + y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) - \frac{2}{x^2}y(x) = 0.$

b) $x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1 + \left(\log x\right)^2.$

Lösungsvorschlag

Bei genauerer Betrachtung erkennen wir, dass es sich bei den folgenden Aufgaben stets um (homogene bzw. inhomogene) Euler'sche Differentialgleichungen handelt. Hier machen wir die Substitution $x = e^t \iff t = \log x$, welche uns auf eine (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $u(t) = y(e^t)$ führt. Diese könnten wir nun mit den bekannten Methoden lösen und anschließend rücksubstituieren. Es ist hierbei allerdings nicht zwingend notwendig die andere Differentialgleichung auszurechnen. In der Lösungstheorie für lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten machen wir stets den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Setzen wir in diesen nun die Substitution $t = \log x$ ein, so erhalten wir

$$y(x) = u(\log x) = e^{\lambda \log x} = x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

als Ansatz, mit dem wir auch direkt eine Lösung berechnen können.

a) Der Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, führt auf

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)x^{\lambda-4+2} + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3+1} + \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 2\lambda x^{\lambda-1-1} - 2x^{\lambda-2} = 0 \\ \iff \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0.\end{aligned}$$

Wir erhalten also das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 \\ &\quad = (\lambda-1)\big(\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-2) + \lambda + 2\big) \\ &\quad = (\lambda-1)(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = (\lambda-1)^3(\lambda+2)\end{aligned}$$

mit der dreifachen Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und der einfachen Nullstelle $\lambda_2 = -2$. Damit ist

$$\{x,\, x\log x,\, x(\log x)^2,\, x^{-2}\}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und als allgemeine Lösung erhalten wir

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \log x + c_3 x(\log x)^2 + c_4 x^{-2}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Wir substituieren $t := \log x$ und setzen $u(t) := y(e^t) \iff y(x) = u(\log x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}y'(x) &= u'(\log x)\tfrac{1}{x}, \\ y''(x) &= u''(\log x)\tfrac{1}{x^2} - u'(\log x)\tfrac{1}{x^2}, \\ y'''(x) &= u'''(\log x)\tfrac{1}{x^3} - 3u''(\log x)\tfrac{1}{x^3} + 2u'(\log x)\tfrac{1}{x^3}.\end{aligned}$$

Einsetzen führt uns dann auf die Differentialgleichung

$$u'''(t) - u(t) = 1 + t^2.$$

Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung ist

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)(\lambda + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für u ist somit

$$u_{\text{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t) + c_3 e^{-t/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da die Inhomogenität ein Polynom 2. Grades ist, machen wir den Ansatz

$$u_p(t) = at^2 + bt + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

mit $u_p'(t) = 2at + b$, $u_p''(t) = 2a$ und $u_p'''(t) = 0$ (an dieser Stelle sei angemerkt, dass wir ohne Substitution den Ansatz $y_p(x) = a(\log x)^2 + b\log x + c$ hätten wählen können). Setzen wir ein, so erhalten wir mit Koeffizientenvergleich

$$-at^2 - bt - c \stackrel{!}{=} 1 + t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -1,\, b = 0,\, c = -1,$$

also $u_p(t) = -t^2 - 1$. Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für u gegeben durch

$$u(t) = -t^2 - 1 + c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t) + c_3 e^{-t/2} \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

und nach Rücksubstitution erhalten wir schließlich als Lösung

$$y(x) = -(\log x)^2 - 1 + c_1 x + c_2 x^{-1/2} \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x) + c_3 x^{-1/2} \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 15 (Tutorium)

a) Geben Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an.

$$x^4 y^{(4)}(x) + 6x^3 y'''(x) - 2xy'(x) + 20y(x) = 0.$$

b) Lösen Sie für $x > 0$ das folgende Anfangswertproblem.

$$y''(x) + \tfrac{1}{x} y'(x) - \tfrac{1}{x^2} y(x) = \tfrac{\log(x)}{x^2}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$$

Lösungsvorschlag

Bei genauerer Betrachtung erkennen wir, dass es sich bei den folgenden Aufgaben stets um (homogene bzw. inhomogene) Euler'sche Differentialgleichungen handelt. Hier machen wir die Substitution $x = e^t \iff t = \log x$, welche uns auf eine (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $u(t) = y(e^t)$ führt. Diese könnten wir nun mit den bekannten Methoden lösen und anschließend rücksubstituieren. Es ist hierbei allerdings nicht zwingend notwendig die andere Differentialgleichung auszurechnen. In der Lösungstheorie für lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten machen wir stets den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Setzen wir in diesen nun die Substitution $t = \log x$ ein, so erhalten wir

$$y(x) = u(\log x) = e^{\lambda \log x} = x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

als Ansatz, mit dem wir auch direkt eine Lösung berechnen können.

a) Setzen wir den Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ein, so erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 6\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda + 20 \\
&\quad = \lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20 \\
&\quad = (\lambda+2)^2(\lambda-2-i)(\lambda-2+i).
\end{aligned}$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = -2$ und den einfachen Nullstellen $\lambda_2 = 2 + i$ und $\lambda_3 = 2 - i$. Damit erhalten wir als Fundamentalsystem

$$\{x^{-2},\, x^{-2}\log x,\, x^2\cos(\log x),\, x^2\sin(\log x)\},$$

und als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2}\log x + c_3 x^2 \cos(\log x) + c_4 x^2 \sin(\log x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Setzen wir den Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ein, so erhalten wir als charakteristisches Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist damit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 x + c_2 x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung wollen wir uns an den Ansätzen vom Typ der rechten Seite orientieren. Mit der Substitution $t := \log x$ hätten wir als Inhomogenität das Polynom t von Grad 1 erhalten, d.h. wir würden $at + b$ als speziellen Ansatz wählen. Mit obiger Substitution erhalten wir aber gerade den Ansatz

$$y_p(x) = a \log x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit $y_p'(x) = a\frac{1}{x}$ und $y_p''(x) = -a\frac{1}{x^2}$. Multiplikation der Differentialgleichung mit x^2 und Einsetzen des Ansatzes führt uns auf

$$-a + a - a\log x - b \overset{!}{=} a \log x + b \quad \Longleftrightarrow \quad a = -1,\ b = 0,$$

d.h. $y_p(x) = -\log x$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = -\log x + c_1 x + c_2 x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung davon ist $y'(x) = -\frac{1}{x} + c_1 - c_2\frac{1}{x^2}$, und mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$y(1) = c_1 + c_2 = 2 \quad \text{und} \quad y'(1) = -1 + c_1 - c_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 1.$$

D.h. die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = -\log x + x + x^{-1}.$$

Aufgabe 16 (Übung)

Wir wollen spezielle Lösungen der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

auf ganz $\mathbb{R}^3$ suchen, die rotationssymmetrisch zur z-Achse sind. Ein Wechsel zu Kugelkoordinaten, also die Verwendung der Funktion $U : [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$U(r, \vartheta, \varphi) := u(r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta)),$$

liefert die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) = 0.$$

Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe des Separationsansatzes $U(r, \vartheta, \varphi) = R(r)S(\vartheta)$, wobei R von der Form r^λ für $\lambda \geqslant 0$ und S ein Polynom von $\cos(\vartheta)$ sein soll.

Lösungsvorschlag

Multiplizieren wir die Gleichung mit r^2, setzen den Ansatz ein und teilen durch $U = RS$, so erhalten wir (beachte $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$)

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{S(\vartheta)\sin(\vartheta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\vartheta}\right).$$

Die linke Seite hängt nur von r ab, die rechte Seite nur von ϑ. Da die Gleichung für alle möglichen Werte von r und ϑ erfüllt sein soll, müssen beide Seiten gleich einer Konstante α sein. Dies liefert für R die Eulersche Differentialgleichung

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) - \alpha R(r) = 0.$$

Wenn $\alpha \geqslant 0$ ist, so finden wir genau ein $\lambda \geqslant 0$ mit $\alpha = \lambda(\lambda+1)$ und $R(r) = r^\lambda$ löst die Differentialgleichung.
Nun gilt auch

$$-\lambda(\lambda+1) = \frac{1}{S(\vartheta)\sin(\vartheta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\vartheta}\right),$$

also

$$\sin^2(\vartheta)\lambda(\lambda+1) + \frac{\sin(\vartheta)}{S(\vartheta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\vartheta}\right) = 0.$$

Wir setzen $x = \cos(\vartheta)$, $y(x) = S(\arccos(x))$ und berechnen mit der Ketten- und Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\vartheta} = -\sin(\vartheta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\vartheta^2} = -\cos(\vartheta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sin^2(\vartheta)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Damit folgt ($\cos(\vartheta) = x, \sin(\vartheta) = \sqrt{1-x^2}$)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\vartheta^2} + \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\vartheta} + \lambda(\lambda+1)S \\
&= -\cos(\vartheta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sin^2(\vartheta)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \cos(\vartheta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\lambda(\lambda+1)y \\
&= (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \lambda(\lambda+1)y.
\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich mit einem Potenzreihenansatz lösen. Mit

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

folgt

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k,$$

$$y''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_{k+1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)ka_kx^k - 2\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k + \lambda(\lambda+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)(k+2)a_{k+2} - (k(k+1)-\lambda(\lambda+1))a_k)x^k.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert für $k \geqslant 0$, dass

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} - (k(k+1)-\lambda(\lambda+1))a_k = 0,$$

also

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda(\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}a_k \qquad \forall k \geqslant 0,$$

wobei dementsprechend a_0 und a_1 frei wählbar sind. Die daraus resultierende Lösung ist genau dann ein Polynom, wenn die Koeffizienten irgendwann 0 sind, also λ einen Wert annimmt, sodass $k(k+1)-\lambda(\lambda+1)=0$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt $\lambda = n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und a_0 bzw. a_1 muss 0 gesetzt werden, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.
Wir wollen eine explizite Formel für diese Polynome angeben. Wir benötigen zwei Gleichungen für Binomialkoeffizienten, die einfach zu überprüfen sind. Zur Erinnerung: Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant k$ ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

und es gilt

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k}\frac{n+1-j}{j} = \prod_{j=1}^{k}\frac{n-k+j}{j}$$

Wir führen die folgende Rechnung nur für gerade $n = 2n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}_0$) durch, die Rechnung für ungerade n funktioniert analog. Sei $k \in \{0, \dots, n_0\}$. Nach der Rekursionsformel gilt (iterativ anwenden und zuletzt $a_2 = -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}a_0$ verwenden)

$$a_{2k} = \prod_{j=1}^{k}\frac{(2k-2j)(2k-2j+1)-n(n+1)}{(2k-2j+1)(2k-2j+2)}a_0.$$

Theoretisch müssten wir dies mit einer kurzen Induktion überprüfen, die wir hier aus Gründen der Übersichtlichkeit unterlassen. Im Nenner werden insgesamt die Zahlen von 2 bis $2k$ aufmultipliziert, sodass wir diesen einfacher schreiben können als $2j(2j-1)$ ($j = 1, \dots, k$). Da wir obige Formeln anwenden wollen, müssen wir den Zähler in zwei Faktoren zerlegen, sodass einer $2j$ und einer $2j-1$ beinhaltet. Wir erkennen, dass

$$(2k-2j)(2k-2j+1)-n(n+1) = (n-2k+2j)(-n-2k+(2j-1)) = (-1)(n-2k+2j)(n+2k-(2j-1))$$

gilt. Es ergibt sich demnach die übersichtliche Formel

$$a_{2k} = (-1)^k\prod_{j=1}^{k}\frac{n-2k+2j}{2j}\prod_{j=1}^{k}\frac{n+2k-(2j-1)}{2j-1}a_0.$$

Im ersten Produkt können wir eine 2 kürzen und erhalten mit der zweiten Formel für die Binomialkoeffizienten von oben

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{n-2k+2j}{2j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n_0-k+j}{j} = \binom{n_0}{k}.$$

Beim zweiten Produkt sehen wir, dass wir über alle ungeraden Zahlen von 1 bis $2k-1$ multiplizieren. Das ist dasselbe wie über alle Zahlen von 1 bis $2k$ zu multiplizieren und die geraden Zahlen wieder rauszudividieren. Es folgt mit der ersten Formel über Binomialkoeffizienten von oben

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{n+2k-(2j-1)}{2j-1} = \frac{\prod_{j=1}^{2k} \frac{n+2k-j}{j}}{\prod_{j=1}^{k} \frac{n+2k-2j}{2j}} = \frac{\prod_{j=1}^{2k} \frac{(n+2k-1)+1-j}{j}}{\prod_{j=1}^{k} \frac{(n_0+k-1)+1-j}{j}} = \frac{\binom{n+2k-1}{2k}}{\binom{n_0+k-1}{k}}.$$

Ingesamt erhalten wir nun die so viel schönere Formel

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\binom{n_0}{k}\binom{n+2k-1}{2k}}{\binom{n_0+k-1}{k}} a_0 = (-1)^k \frac{n_0!\,(n+2k-1)!\,k!\,(n_0-1)!}{k!\,(n_0-k)!\,(2k)!\,(n-1)!\,(n_0+k-1)!} a_0.$$

Der Ausdruck $k!$ kürzt sich nun. a_0 wird für diese Polynome nun normalerweise so gewählt, dass sie bei 1 den Wert 1 annehmen. Dass dies genau für $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ der Fall ist, glauben wir an dieser Stelle und könnten es am Ende dieser Aufgabe nachrechnen (eigentlich ist es jedoch irrelevant für die weiteren Umformungen, abgesehen davon, dass die Formeln ebenfalls schöner aussehen). Es gilt ($2k = n$, also $k = n_0$)

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \stackrel{!}{=} a_n = (-1)^{n_0} \frac{n_0!\,(2n-1)!\,(n_0-1)!}{0!\,n!\,(n-1)!\,(n-1)!} a_0 \Leftrightarrow a_0 = (-1)^{n_0} \frac{(2n)!\,((n-1)!)^2}{2^n n!\,n_0!\,(2n-1)!\,(n_0-1)!}.$$

Die $(2n)!$ kürzt sich mit der $(2n-1)!$ zu einer $2n$ im Zähler, die $n!$ mit einer der $(n-1)!$ zu einer n im Nenner, somit ist schließlich

$$a_0 = (-1)^{n_0} \frac{2(n-1)!}{2^n n_0!\,(n_0-1)!}$$

und

$$a_{2k} = \frac{2(-1)^{k+n_0}}{2^n} \frac{(n+2k-1)!}{(n_0-k)!\,(2k)!\,(n_0+k-1)!}$$

Um eine Formel zu erhalten, die konsistent auch für ungerade n funktioniert, machen wir einen Übergang von $2k$ zu $n-2k$ (also von k zu n_0-k), sodass für (un)gerade n die (un)geraden Koeffizienten berechnet werden. Es folgt

$$a_{n-2k} = \frac{2(-1)^k}{2^n} \frac{(2n-2k-1)!}{k!\,(n-2k)!\,(n-k-1)!}.$$

Zuletzt erweitern wir den Bruch oben um $2n-2k = 2(n-k)$ und unten um $n-k$, sodass die -1-en in den Fakultäten verschwinden und auch die 2.

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{2^n} \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-2k)!\,(n-k)!}.$$

Unter der Annahme, dass wir das gleiche Ergebnis für ungerade n erreichen können, haben die Polynome die Form

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^n} \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-2k)!\,(n-k)!} x^{n-2k},$$

wobei $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner $\frac{n}{2}$ ist. Der Ausdruck

$$\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$$

enspricht nun wegen der übrig bleibenden Faktoren $(2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(n-2k+1)$ der n-ten Ableitung von x^{2n-2k}. Demnach gilt

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k}$$

Da für $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gilt, dass $2k > n$, also $2n - 2k < n$, wären ab dann die auftretenden Ableitung sowieso 0, sodass wir ohne etwas zu ändern die weitern Summanden bis n hinzufügen können. Ziehen wir die Ableitung noch vor die Summe, so erkennen wir, dass wir den Binomischen Lehrsatz (siehe z.B. HM1, Blatt 2, Aufgabe 9a)) anwenden können und erreichen so unser Ziel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x^2)^{n-k} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$$

Diese Polynome werden Legendrepolynome genannt. Die gesuchten Lösungen der Laplacegleichung sind

$$u_n(r,\vartheta,\varphi) = r^n P_n(\cos(\vartheta)) \qquad \forall (r,\vartheta,\varphi) \in [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.
Bemerkung: Nehmen wir nicht die Unabhängigkeit von φ an, so erhalten wir schnell den Anteil $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ für $m \in \{-n,\ldots,n\}$, jedoch wird die Differentialgleichung für ϑ dann ungleich schwerer durch einen zusätzlichen Term $-\frac{m^2}{1-x^2}y$. Die zugehörigen Lösungen, die so genannten *zugeordneten Legendrepolynome* (die für ungerade m keine Polynome mehr sind), entstehen aus Ableitungen der Legendrepolynome und bilden zusammen mit dem obigen Faktor für φ die *Kugelflächenfunktionen*.

Aufgabe 17 (Tutorium)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + 2xy' - y = (1+x+x^2)e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2},$$

welches mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ gelöst werden kann.

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n an.

b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten explizit gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}, \quad n \geq 1.$$

c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems in geschlossener Form an.

Lösungsvorschlag

a) Wir machen einen Potenzreihenansatz, d.h. es gilt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\begin{aligned}
y'' + 2xy' - y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + 2na_n x^n - a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n\Big) x^n.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Exponentialreihe auf der rechten Seite der Gleichung führt zu

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)e^x = (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right)x^n \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke gleich, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n\Big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!}x^n.$$

Da die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig sind, folgt direkt

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n = \frac{1+n^2}{n!},$$

und daraus erhalten wir die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geq 0.$$

b) Wir wollen die Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Setzen wir die Anfangswerte ein, so erhalten wir

$$y(0) = a_0 = 0, \quad y'(0) = a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 0!}.$$

Damit folgt

$$a_2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\cdot 1!},$$

d.h. die Aussage ist korrekt für $n = 1, 2$ und der Induktionsanfang ist gemacht. Gilt die Aussage $a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2\cdot n!}$ für ein $n \geq 1$ (IV), so folgt

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} a_n \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{2\cdot(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2+2n^2-(2n-1)n}{(n+2)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+n}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{2\cdot(n+1)!}, \end{aligned}$$

und völlig analog $a_{n+3} = \frac{1}{2\cdot(n+2)!}$.

c) Mit Aufgabenteil b) gilt nun $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}$ für $n \geq 1$. Damit folgt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot(n-1)!} x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \frac{x}{2} e^x.$$