Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
04.12.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 18 (Übung)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung 1,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0,$$

für $x > 0$ an.

Aufgabe 19 (Tutorium)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' - xy' + \left(\frac{3}{4} - x^2\right)y = 0$$

für $x > 0$ an.

Aufgabe 20 (Übung)

a) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = -y, \qquad y(0) = -1,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie alle Approximationen y_n ($n \in \mathbb{N}$) der Lösung aus der Fixpunktiteration und geben sie die maximale Lösung an.

b) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswerproblem

$$y' = x^2 + xy^2, \qquad y(0) = 0,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie die potentiellen Approximationen y_n aus der Fixpunktiteration für $n = 1, 2, 3$.

Aufgabe 21 (Tutorium)

Finden Sie die allgemeine Lösung $\vec{y} = (u, v)$ der folgenden Systeme linearer Differentialgleichungen unter Verwendung der angegebenen homogenen Lösung des Problems, jeweils auf dem Intervall $(0, \infty)$.

a) $u' = -\frac{2v}{x^2} + x, v' = -u + 1, \qquad \vec{y}_h(x) = (-2c_1x + \frac{c_2}{x^2}, c_1x^2 + \frac{c_2}{x}),$

b) $xu' = u + 2v + x\cos(x), xv' = -u - 2v, \qquad \vec{y}_h(x) = (c_1 + \frac{c_2}{x}, -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{x}).$

Aufgabe 22 (Übung)

Finden Sie die allgemeine Lösung $\vec{y} = (u, v)$ der folgenden Systeme linearer Differentialgleichungen unter Verwendung der angegebenen homogenen Lösung des Problems, jeweils auf dem Intervall $(0, \infty)$.

a) $u' = -\frac{2v}{x^2} + x\mathrm{e}^x, v' = -u + x, \qquad \vec{y}_h(x) = (-2c_1 x + \frac{c_2}{x^2}, c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}),$

b) $xu' = u + 3v + x, xv' = u - v, \qquad \vec{y}_h(x) = (c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \frac{c_1}{3} x^2 - \frac{c_2}{x^2}).$

Aufgabe 23 (Tutorium)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eigenwertmethode.

a) $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y},$

b) $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}.$