Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
04.12.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 18 (Übung)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung 1,

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0,$$

für $x > 0$ an.

Lösungsvorschlag

Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz liefert

$$f(s) = s(s-1) + s - 1 = s^2 - 1 = (s+1)(s-1).$$

Offensichtlich sind ± 1 die Nullstellen dieser Funktion und laut Vorlesung sind die beiden Lösungen gegeben durch

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y_2(x) = A\log(x)y_1(x) + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

wobei wir $A \in \{0,1\}$ noch nicht bestimmen können, da wir uns im Fall befinden, dass die beiden Nullstellen um eine natürliche Zahl (hier 2) unterscheiden. Es gilt

$$y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-2},$$

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1}x^{n-1},$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_{n-1}x^{n-2}.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1}x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\
&= (a_0 - a_0)x^1 + (2a_1 + 2a_1 - a_1)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n(n-1)a_{n-1} + na_{n-1} + a_{n-3} - a_{n-1})x^n \\
&= 3a_1x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}[(n^2-1)a_{n-1} + a_{n-3}]x^n.
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert, dass a_0 beliebig ist, $a_1 = 0$ und

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)} \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Somit sind die ungeraden Koeffizienten alle 0 und für die geraden Koeffizienten gilt

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2)} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+1)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Rekursives Anwenden dieser Gleichung liefert

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} a_0.$$

Diese Gleichung beweisen wir mit einer kurzen Induktion.
IA ($k = 1$): $a_2 = -\frac{a_0}{8}$ folgt sofort aus der ursprünglichen Rekursionsformel.
IS ($k \to k+1$): Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{2^2(k+1)(k+2)} \overset{\text{(IV)}}{=} -\frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)! \cdot 2^2 k(k+1)} a_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2(k+1=}(k+1)!(k+2)!} a_0,$$

womit die Formel bewiesen ist. Die Funktion (setze $a_0 = \frac{1}{2}$)

$$y_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} x^{2k} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

löst die Ausgangsgleichung (sogar auf ganz R). Für y_2 versuchen wir uns zunächst mit dem logarithmusfreien Ansatz ($A = 0$). Es gilt

$$y_2(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-2},$$

$$y_2'(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} n b_{n+1} x^{n-1},$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} n(n-1) b_{n+1} x^{n-2}.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=-1}^{\infty} n(n-1) b_{n+1} x^n + \sum_{n=-1}^{\infty} n b_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n - \sum_{n=-1}^{\infty} b_{n+1} x^n \\ &= (2b_0 - b_0 - b_0) x^{-1} - b_1 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n(n-1) b_{n+1} + n b_{n+1} + b_{n-1} - b_{n+1}) x^n \\ &= -b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 1) b_{n+1} + b_{n-1}] x^n. \end{aligned}$$

Dies liefert wieder, dass b_0 beliebig ist, $b_1 = 0$ und

$$(n^2 - 1)b_{n+1} = b_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für $n = 1$ liefert dies aber $0 = b_0$, womit rekursiv alle Koeffizienten 0 wären und y_2 somit die konstante Nullfunktion, ein Widerspruch. Deshalb müssen wir im Ansatz $A = 1$ wählen. Nun folgt, dass sich y_2 um den Term

$$\log(x)y_1(x)$$

unterscheidet, y_2' um den Term

$$\frac{y_1(x)}{x} + \log(x)y_1'(x)$$

und y_2'' um den Term

$$-\frac{y_1(x)}{x^2} + \frac{2}{x}y_1'(x) + \log(x)y_1''(x).$$

Beim Einsetzen in die Gleichung ergibt sich aus dem jeweils letzten Term genau die Gleichung (multipliziert mit $\log(x)$), die 0 ergibt, weil y_1 eine Lösung ist. Der jeweils erste Term von y_2' und y_2'' hebt sich weg und übrig bleibt (von $x^2y''(x)$) der Term

$$2xy_1'(x),$$

womit ingesamt die Differentialgleichung nach Einsetzen des Ansatzes die Form

$$0 = 2xy_1'(x) - b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n^2-1)b_{n+1} + b_{n-1}]x^n$$

hat, was, wenn wir y_1 einsetzen und den Term auf die andere Seite bringen zu

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}k!(k+1)!}x^{2k+1} = -b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n^2-1)b_{n+1} + b_{n-1}]x^n$$

wird. Daraus folgt $b_0 = -1$,$b_1 = 0$,

$$((2k)^2 - 1)b_{2k+1} + b_{2k-1} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

und somit $0 = b_1 = b_3 = b_5 = \dots$, da links die geraden Koeffizienten fehlen, und schließlich

$$((2k+1)^2 - 1)b_{2k+2} + b_{2k} = -\frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}k!(k+1)!} \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

wobei b_2 frei wählbar ist und normalerweise auf $b_2 = -\frac{1}{4}$ gesetzt wird. Es folgt

$$b_{2k} = \frac{(-1)^k(h_k + h_{k-1})}{2^{2k}(k-1)!k!} \qquad \forall k \geqslant 2,$$

wobei $h_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$, was wir mit einer Induktion beweisen können.
IA ($k = 2$): Es gilt nach der Rekursionsformel

$$b_4 = -\frac{-1 \cdot 3}{2^2 1!2! \cdot 8} - \frac{b_2}{8} = \frac{5}{64} = \frac{(-1)^2(1 + \frac{1}{2} + 1}{2^4 1!2!}.$$

IS ($k \to k+1$): Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt mit $((2k+1)^2 - 1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$ aus der Rekursionsformel, dass

$$b_{2(k+1)} = b_{2k+2} = -\frac{b_{2k}}{4k(k+1)} - \frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}(k-1)!k!}.$$

Setzen wir die Induktionsvoraussetzung ein, so ergibt sich

$$b_{2(k+1)} = -\frac{(-1)^k(h_k + h_{k-1})}{2^{2k}(k-1)!k! \cdot 4k(k+1)} - \frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}k!(k+1)! \cdot 4k(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}[(h_k + h_{k-1}) + \frac{2k+1}{k(k+1)}]}{2^{2(k+1)}((k+1)-1)!(k+1)!}.$$

Wegen $\frac{2k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ folgt $(h_k + h_{k-1}) + \frac{2k+1}{k(k+1)} = h_{k+1} + h_k$ und somit die Behauptung. Damit ergibt sich für die zweite Lösung die Darstellung

$$y_2(x) = \log(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(h_k + h_{k-1})}{2^{2k}(k-1)!k!} x^{2k-1}.$$

Die allgemeine Lösung für $x > 0$ ist dann gegeben durch

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 19 (Tutorium)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - xy' + \left(\frac{3}{4} - x^2\right) y = 0$$

für $x > 0$ an.

Lösungsvorschlag

Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz liefert die determinierende Gleichung (an der DGL ablesen!)

$$f(s) = s(s-1) - s + \frac{3}{4} = s^2 - 2s + \frac{3}{4} = 0,$$

mit den Nullstellen $s_1 = \frac{1}{2}$ und $s_2 = \frac{3}{2}$. Wegen $|s_2 - s_1| = 1 \in \mathbb{N}$ müssen wir für die zweite Lösung unter Umständen den Logarithmusterm mit betrachten. Wir erhalten außerdem die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(1+s)c_1 &= 0, \\ f(n+s)c_n - c_{n-2} &= 0 \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

- $s_2 = \frac{3}{2}$: In diesem Fall lauten die Rekurrenzgleichungen

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 0, \\ c_n &= \frac{c_{n-2}}{n(n+1)} \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

  Damit folgt $c_{2k+1} = 0$, sowie $c_{2k} = \frac{1}{(2k+1)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$y_2(x) = x^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sqrt{x} \sinh(x)$$

für alle $x > 0$.

- $s_1 = \frac{1}{2}$: Wir versuchen zunächst den „logarithmusfreien" Ansatz (vgl. Satz 1.14 der Vorlesung). In diesem Fall lauten die Rekurrenzgleichungen

$$\begin{aligned} 0 \cdot c_1 &= 0, \\ c_n &= \frac{c_{n-2}}{n(n-1)} \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

  Wegen der ersten Gleichung, kann c_1 frei gewählt werden, etwa $c_1 = 0$. Die zweite Gleichung liefert dann $c_{2k+1} = 0$, sowie $c_{2k} = \frac{1}{(2n)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit führt der „logarithmusfreie" Ansatz in der Tat zum Ziel und es ist

$$y_1(x) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \sqrt{x} \cosh(x)$$

  für alle $x > 0$.

Aufgabe 20 (Übung)

a) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = -y, \qquad y(0) = -1,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie alle Approximationen y_n ($n \in \mathbb{N}$) der Lösung aus der Fixpunktiteration und geben sie die maximale Lösung an.

b) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswerproblem

$$y' = x^2 + xy^2, \qquad y(0) = 0,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie die potentiellen Approximationen y_n aus der Fixpunkt-titeration für $n = 1, 2, 3$.

Lösungsvorschlag

a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) = -y$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist F stetig und stetig partiell nach y differenzierbar:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Das zu lösende Anfangswertproblem ist also

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(0) = -1.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat es also eine eindeutige maximale Lösung.

Die Picard-Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t)\, \mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -1 + \int_0^x 1 \, \mathrm{d}t = -1 + x, \\ y_2(x) &= -1 - \int_0^x (-1+t) \, \mathrm{d}t = -1 + x - \frac{1}{2}x^2, \\ y_3(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3, \\ y_4(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies legt die Behauptung

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Tatsächlich gilt (Beweis durch vollständige Induktion):

- **IA** ($n = 0$):

$$y_0(x) = -1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **IS** ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t) \, \mathrm{d}t \overset{\text{(IV)}}{=} -1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^x t^k \, \mathrm{d}t \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)} x^{k+1} = -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} -1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iterierte für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen

$$y(x) := \lim_{n \to \infty} y_n(x) = -\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = -e^{-x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung bestätigt

$$y'(x) = e^{-x} = -y(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist y auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

b) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) = x^2 + xy^2$. Dann ist F für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig partiell nach y differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist daas gegebene Anfangswertproblem demnach eindeutig lösbar. Die Picard-Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1}(x) &= \int_0^x t^2 + t y_n^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$y_1(x) = \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x t^2 + \frac{t^7}{9}\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{72},$$

$$y_3(x) = \int_0^x t^2 + t\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^8}{72}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^x t^2 + \frac{t^7}{9} + \frac{t^{12}}{108} + \frac{t^{17}}{5184}\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{72} + \frac{x^{13}}{1404} + \frac{x^{18}}{93312}.$$

Nach einem Hinweis in der Vorlesung konvergiert diese Folge nun auf einer kleinen Umgebung der 0 (gleichmäßig) gegen die tatsächliche Lösung.

Aufgabe 21 (Tutorium)

Finden Sie die allgemeine Lösung $\vec{y} = (u,v)$ der folgenden Systeme linearer Differentialgleichungen unter Verwendung der angegebenen homogenen Lösung des Problems, jeweils auf dem Intervall $(0,\infty)$.

a) $u' = -\frac{2v}{x^2} + x, v' = -u + 1, \qquad \vec{y}_h(x) = (-2c_1 x + \frac{c_2}{x^2}, c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}),$

b) $xu' = u + 2v + x\cos(x), xv' = -u - 2v, \qquad \vec{y}_h(x) = (c_1 + \frac{c_2}{x}, -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{x}).$

Lösungsvorschlag

Es handelt sich jeweils um ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung, also

$$\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x),$$

wobei $A(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine 2×2-Matrix ist. Aus einer allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung ($\vec{b} = 0$),

$$\vec{y}_h = c_1\vec{y}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x)$$

bilden wir das Fundamentalsystem $\Phi(x)$ (eine 2×2-Matrix), indem wir die beiden Lösungen in dessen Spalten schreiben. Eine partikuläre Lösung der Ausgangsgleichung ist dann gegeben durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x)\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Inverse gegeben durch $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, falls $ad - bc \neq 0$. Zusammen mit der homogenen Lösung ergibt sich dann die allgemeine Lösung der Gleichung.

a) Es gilt

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{x^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist laut Aufgabenstellung gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} -2x & \frac{1}{x^2} \\ x^2 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\Phi(x)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi(x)^{-1}\vec{b}(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} - 1 \\ x^3 + 2x \end{pmatrix}.$$

Ein Integral davon ist gegeben durch

$$\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{x} - x \\ \frac{x^4}{4} + x^2 \end{pmatrix}$$

und eine partikuläre Lösung somit durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x)\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3x^2}{4} \\ -\frac{x^3}{4} \end{pmatrix}.$$

Die Zusammensetzung mit der homogenen Lösung aus der Aufgabenstellung liefert nun die allgemeine Lösung.

b) Es gilt

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{2}{x} \\ -\frac{1}{x} & -\frac{2}{x} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist laut Aufgabenstellung gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\Phi(x)^{-1} = -2x\begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -x & -2x \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi(x)^{-1}\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ -x\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Ein Integral davon ist gegeben durch

$$\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ -x\sin(x) - \cos(x) \end{pmatrix}$$

und eine partikuläre Lösung somit durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x) \int \Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) \, \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \sin(x) - \frac{\cos(x)}{x} \\ \frac{1}{x} \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Die Zusammensetzung mit der homogenen Lösung aus der Aufgabenstellung liefert nun die allgemeine Lösung.

Aufgabe 22 (Übung)

Finden Sie die allgemeine Lösung $\vec{y} = (u, v)$ der folgenden Systeme linearer Differentialgleichungen unter Verwendung der angegebenen homogenen Lösung des Problems, jeweils auf dem Intervall $(0, \infty)$.

a) $u' = -\frac{2v}{x^2} + x\mathrm{e}^x, v' = -u + x, \qquad \vec{y}_h(x) = (-2c_1 x + \frac{c_2}{x^2}, c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}),$

b) $xu' = u + 3v + x, xv' = u - v, \qquad \vec{y}_h(x) = (c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \frac{c_1}{3} x^2 - \frac{c_2}{x^2}).$

Lösungsvorschlag

Es handelt sich jeweils um ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung, also

$$\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x),$$

wobei $A(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine 2×2-Matrix ist. Aus einer allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung ($\vec{b} = 0$),

$$\vec{y}_h = c_1 \vec{y}_1(x) + c_2 \vec{y}_2(x)$$

bilden wir das Fundamentalsystem $\Phi(x)$ (eine 2×2-Matrix), indem wir die beiden Lösungen in dessen Spalten schreiben. Eine partikuläre Lösung der Ausgangsgleichung ist dann gegeben durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x) \int \Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) \, \mathrm{d}x.$$

Für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Inverse gegeben durch $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, falls $ad - bc \neq 0$. Zusammen mit der homogenen Lösung ergibt sich dann die allgemeine Lösung der Gleichung.

a) Es gilt

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{x^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist laut Aufgabenstellung gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} -2x & \frac{1}{x^2} \\ x^2 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\Phi(x)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} - \mathrm{e}^x \\ x^3 \mathrm{e}^x + 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Ein Integral davon ist gegeben durch

$$\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \log(x) - \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + \frac{2x^3}{3} \end{pmatrix}$$

und eine partikuläre Lösung somit durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x)\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x\left(\frac{1}{3} - \log(x)\right) + \mathrm{e}^x\left(x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \\ \frac{x^2}{3}\left(\log(x) + \frac{2}{3}\right) + \mathrm{e}^x\left(2 - x - \frac{2}{x}\right) \end{pmatrix}.$$

Die Zusammensetzung mit der homogenen Lösung aus der Aufgabenstellung liefert nun die allgemeine Lösung.

b) Es gilt

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{3}{x} \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist laut Aufgabenstellung gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x^2} \\ \frac{x^2}{3} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\Phi(x)^{-1} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{x^2}{3} & -x^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi(x)^{-1}\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4x^2} \\ \frac{x^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Ein Integral davon ist gegeben durch

$$\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4x} \\ \frac{x^3}{12} \end{pmatrix}$$

und eine partikuläre Lösung somit durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x)\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x \\ -\frac{x}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Zusammensetzung mit der homogenen Lösung aus der Aufgabenstellung liefert nun die allgemeine Lösung.

Aufgabe 23 (Tutorium)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eigenwertmethode.

a) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{y}$,

b) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\vec{y}$.

Lösungsvorschlag

a) Setzen wir $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so hat A offensichtlich die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 1$ mit den Eigenräumen

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(A - 4I) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \\ \operatorname{Kern}(A - I) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem ist damit gegeben durch

$$\left\{\vec{\phi}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Definieren wir $\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 2e^{t} \\ 0 & -3e^{t} \end{pmatrix}$, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c} = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1/2} = 2 \pm 3i$. Der Eigenraum des komplexen Eigenwertes λ_1 ist gegeben durch

$$\operatorname{Kern}\Big(A - (2+3i)I\Big) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1-3i & 2 \\ -5 & -1-3i \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1+3i \\ -5 \end{pmatrix}\right\}.$$

Eine komplexe Lösung ist damit

$$\begin{aligned} e^{(2+3i)t}\begin{pmatrix} 1+3i \\ -5 \end{pmatrix} &= e^{2t}\Big(\cos(3t) + i\sin(3t)\Big)\begin{pmatrix} 1+3i \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) \\ -5\cos(3t) \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} \sin(3t) + 3\cos(3t) \\ -5\sin(3t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und die Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert schließlich das Fundamentalsystem

$$\left\{\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t) \\ -5e^{2t}\cos(3t) \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t) \\ -5e^{2t}\sin(3t) \end{pmatrix}\right\}$$

bzw. die allgemeine Lösung $\vec{y}(t) = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.