Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
18.12.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 24 (Übung)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Ersetzen Sie die erste durch die zweite Ableitung und formen Sie das System zu einem erster Ordnung um.

Lösungsvorschlag

Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lautet das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^3,$$

d.h. wir haben den 3-fachen Eigenwert $\lambda = 1$. Der zugehörigen Eigenraum ist

$$\operatorname{Kern}(A - I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

der eindimensional ist und uns die Lösung

$$\vec{\phi}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefert. Wir ergänzen nun die Basisvektoren aus dem Eigenraum mit Hauptvektoren. Dafür bestimmen wir

$$\operatorname{Kern}(A - I)^2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

wodurch wir eine weitere Lösung erhalten, indem wir einen Vektor wählen, der nicht im Eigenraum liegt. Hier ist z.B.

$$\vec{\phi}_2(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$$

eine weitere Lösung. Schließlich bestimmen wir

$$\operatorname{Kern}(A-I)^3 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

und erhalten als dritte Lösung

$$\vec{\phi}_3(t) = e^t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}t^2(A-I)^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = e^t\begin{pmatrix}1+2t\\2t+t^2\\t^2\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch $\vec{y}(t) = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + c_3\vec{\phi}_3(t)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir nun das System

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix}3&-2&2\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\vec{y},$$

so definieren wir

$$\vec{z} = (y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3')$$

und erhalten wegen $z = (y_1', y_2', y_3', y_1'', y_2'', y_3'')$ und der gegebenen Differentialgleichung das System erster Ordnung

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\3&-2&2&0&0&0\\2&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\vec{z}.$$

Dieses System lässt sich wie gewohnt lösen und liefert ein Fundamentalsystem aus 6 linear unabhängigen Funktionen $\vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$, deren erste drei Komponenten (da diese drei Komponenten von $\vec{z}$ gerade $\vec{y}$ entsprechen) die allgemeine Lösung des Systems liefern.

Aufgabe 25 (Tutorium)

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-7&-4\\-7&5&-4\\5&5&2\end{pmatrix}\vec{y}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

Wir berechnen zunächst ein Fundamentalsystem: Sei

$$A := \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-7&-4\\-7&5&-4\\5&5&2\end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom p_A von A gilt

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{5}{6}-\lambda & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{6}-\lambda & -\frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{2}{6}-\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 5-6\lambda & -7 & -4 \\ -7 & 5-6\lambda & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 12-6\lambda & -12+6\lambda & 0 \\ -7 & 5-6\lambda & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\lambda \end{pmatrix} = \frac{2-\lambda}{36}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 5-6\lambda & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{2-\lambda}{36}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -2-6\lambda & -4 \\ 5 & 10 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1-ten Zeile}}{=}} \frac{2-\lambda}{36}\begin{pmatrix} -2-6\lambda & -4 \\ 10 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{2-\lambda}{36}((-2-6\lambda)(2-6\lambda)+40) = \frac{2-\lambda}{36}(36\lambda^2-4+40) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2+1) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

Es ist also das Spektrum von A gegeben durch $\{2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Wir bestimmen nun die Eigenräume:

- $E_A(2)$:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{10}{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot 6 \\ |\cdot 6 \\ |\cdot 6 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & -7 & -4 \\ -7 & -7 & -4 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} {}^{+} \\ \cdot(-1) \quad {}^{+} \\ \cdot(\frac{7}{5}) \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot\left(-\frac{1}{18}\right) \\ |\cdot \frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_A(2) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

- $E_A(\mathrm{i})$:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{5}{6}-\mathrm{i} & -\frac{7}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{6}-\mathrm{i} & -\frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{2}{6}-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot 6 \\ |\cdot 6 \\ |\cdot 6 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 5-6\mathrm{i} & -7 & -4 \\ -7 & 5-6\mathrm{i} & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} {}^{+} \\ \cdot(-1) \\ \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 12-6\mathrm{i} & -12+6\mathrm{i} & 0 \\ -7 & 5-6\mathrm{i} & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot \frac{1}{12-6\mathrm{i}} \\ \\ \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 5-6\mathrm{i} & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \quad \cdot(-5) \\ {}^{+} \\ {}^{+} \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2-6\mathrm{i} & -4 \\ 0 & 10 & 2-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ |\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+3\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 5 & 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \,|\cdot(1-3\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 2-6\mathrm{i} \\ 0 & 5 & 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \end{matrix} \; \cdot\tfrac{1}{5}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E_A(\mathrm{i}) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ \frac{1-3\mathrm{i}}{5} \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}\right\}$$

- $E_A(-\mathrm{i})$: Wird nicht benötigt.

Nach der Vorlesung bilden

$$\begin{aligned}
\vec{\phi}_1(x) &= e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\vec{\phi}_2(x) &= \operatorname{Re}\left(e^{\mathrm{i}x}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\cos(x) \\ 2\cos(x) \\ 3\sin(x)-\cos(x) \end{pmatrix}, \\
\vec{\phi}_3(x) &= \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}x}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ 2\sin(x) \\ -\sin(x)-3\cos(x) \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_1 & \vec{\phi}_2 & \vec{\phi}_3 \end{pmatrix}$. Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch $\vec{y}(t) = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + c_3\vec{\phi}_3(t)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Um die Anfangswerte

$$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu erfüllen, suchen wir also die Lösung $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\Phi(0)\vec{c} = \vec{y}_0.$$

Diese berechnet man mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \Phi(x)\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{\phi}_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sin(x) \\ \frac{2}{3}\sin(x) \\ -\frac{1}{3}\sin(x) - \cos(x) \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 26 (Übung)

Berechnen Sie explizit die Matrixexponentialfunktionen zu den folgenden Differentialgleichungssystemen.

a) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{y}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

b) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

c) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\vec{y}.$

Lösen Sie daraufhin die Anfangswertprobleme **a)** und **b)**.

Lösungsvorschlag

a) Definieren wir $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $A = 2I + B$. Außerdem haben wir $B^2 = 0$ und somit auch $B^k = 0$ für $k \geq 2$. Wegen $(2I)B = B(2I)$ folgt

$$e^{tA} = e^{2tI}e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

b) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ergibt sich mit der Regel von Sarrus zu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(1-\lambda)^2 - 1 + 2 - 2(1-\lambda) - (1-\lambda) - \lambda \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

D.h. die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$E_A(1) = \operatorname{Kern}(A - I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$E_A(-1) = \operatorname{Kern}(A + I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right\},$$

$$E_A(2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Insbesondere ist A diagonalisierbar und mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{tSDS^{-1}} = Se^{tD}S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t - e^{-t} + 4e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{-t} & 6e^{2t} & -3e^t + 3e^{-t} \\ 3e^t - 5e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t + 5e^{-t} + 4e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir dann

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}(0) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t - e^{-t} + 4e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{-t} & 6e^{2t} & -3e^t + 3e^{-t} \\ 3e^t - 5e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & -3e^t + 5e^{-t} + 4e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{2t} \\ -e^t \\ -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

c) Für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 4\lambda + 8 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Seine Nullstellen sind also

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{4-8} = 2 + 2\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2 - 2\mathrm{i}.$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu λ_1:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1-2\mathrm{i} & 5 \\ -1 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \,|\cdot(-1+2\mathrm{i}) \quad &\sim \begin{pmatrix} 5 & -5+10\mathrm{i} \\ -1 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \,|\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right) \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2\mathrm{i} \\ -1 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach der Vorlesung bilden

$$
\begin{aligned}
\vec{\phi}_1(t) &= \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right) = \operatorname{Re}\left(e^{2t}(\cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t))\begin{pmatrix}1-2\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(2t)+2\sin(2t)\\\cos(2t)\end{pmatrix},\\
\vec{\phi}_2(t) &= \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right) = e^{2t}\begin{pmatrix}\sin(2t)-2\cos(2t)\\\sin(2t)\end{pmatrix} \qquad \forall t\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix}\vec{\phi}_1 & \vec{\phi}_2\end{pmatrix}$ für $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$. Es gilt

$$
\Phi(0) = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}.
$$

Berechne die Inverse $[\Phi(0)]^{(-1)}$:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\cdot(-1)\\+\end{matrix} \quad &\sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \mid \cdot \tfrac{1}{2}\\
&\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow [\Phi(0)]^{(-1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nach der Vorlesung ist aber

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= \Phi(t)[\Phi(0)]^{(-1)} = \frac{e^{2t}}{2}\left(\cos(2t)\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{pmatrix} + \sin(2t)\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}\\
&= e^{2t}\left(\cos(2t)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \frac{\sin(2t)}{2}\begin{pmatrix}-1 & 5\\-1 & 1\end{pmatrix}\right) \qquad (t\in\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 27 (Tutorium)

Berechnen Sie e^{tA} für $t\in\mathbb{R}$ und die folgenden Matrizen A:

$$
\textbf{a)}\quad A = \begin{pmatrix}-4 & 12\\-2 & 6\end{pmatrix}, \qquad \textbf{b)}\quad A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \qquad \textbf{c)}\quad A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\2 & 4 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}.
$$

Lösungsvorschlag

a) Hier gilt $A^2 = \begin{pmatrix}-4 & 12\\-2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 12\\-2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8 & 24\\-4 & 12\end{pmatrix} = 2A$. Somit ist $A^3 = A^2A = 2AA = 2^2A$ und induktiv folgt $A^k = 2^{k-1}A$ für $k\in\mathbb{N}$ (beachte, dass die Aussage für $k=0$ falsch ist!). Damit folgt für $t\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}t^kA^k = I + \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{k!}t^kA^k = I + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{k!}t^k2^kA\\
&= I - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}(2t)^kA = I - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}e^{2t}A = \begin{pmatrix}3-2e^{2t} & -6+6e^{2t}\\1-e^{2t} & -2+3e^{2t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

b) Definieren wir $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, so haben wir $A = I + B$; und wegen $B \cdot I = I \cdot B$, gilt somit

$$e^{tA} = e^{t(I+B)} = e^{tI} e^{tB}.$$

Außerdem ist $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit auch $B^k = 0$ für $k \geq 3$. Dies liefert

$$e^{tB} = I + tB + \frac{1}{2}t^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 3t + 2t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten schließlich

$$e^{tA} = e^{tI}e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 3t + 2t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & e^t & 0 \\ (3t + 2t^2)e^t & 2te^t & e^t \end{pmatrix}.$$

c) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Das zugehörige charakteristische Polynom berechnen wir mit der Regel von Sarrus und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)^2(4-\lambda) + 2 + 2 - (4-\lambda) - 2(3-\lambda) - 2(3-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24) = -(\lambda-2)^2(\lambda-6). \end{aligned}$$

Also haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ (mit Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = 6$ (mit Vielfachheit 1). Als Eigenräume erhalten wir

$$\begin{aligned} E_A(2) &= \mathrm{Kern}(A - 2I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \\ E_A(6) &= \mathrm{Kern}(A - 6I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Also ist A diagonalisierbar und mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} =: D.$$

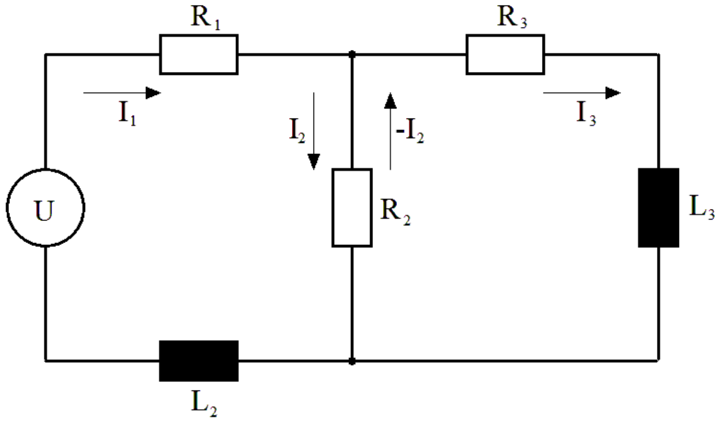
Nun folgt

$$e^{tA} = e^{tSDS^{-1}} = Se^{tD}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{2t}+e^{6t} & -e^{2t}+e^{6t} & -e^{2t}+e^{6t} \\ -2e^{2t}+2e^{6t} & 2e^{2t}+2e^{6t} & -2e^{2t}+2e^{6t} \\ -e^{2t}+e^{6t} & -e^{2t}+e^{6t} & 3e^{2t}+e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28 (Übung)

Wir betrachten das folgende RL-Netzwerk:



Bestimmen Sie unter Verwendung der Kirchhoff'schen Regeln ein Differentialgleichungssystem für die Ströme I_2 und I_3. Lösen Sie anschließend dieses System unter den Anfangsbedingungen $I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$ und mit den Größen $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,$, $L_2 = L_3 = 10\,H$, $U = 10\sin(t)\,V$.

Lösungsvorschlag

Nach den Kirchhoff'schen Regeln gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, \\ R_1I_1 + R_2I_2 + L_2I_1' &= U, \\ R_3I_3 + L_3I_3' - R_2I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite und Umformen der zweiten und dritten nach I_2' bzw. nach I_3' liefert

$$\begin{aligned} I_2' &= \frac{U}{L_2} - \left(\frac{R_1}{L_2} + \frac{R_2}{L_2} + \frac{R_2}{L_3}\right)I_2 + \left(\frac{R_3}{L_3} - \frac{R_1}{L_2}\right)I_3, \\ I_3' &= \frac{R_2}{L_3}I_2 - \frac{R_3}{L_3}I_3. \end{aligned}$$

Setzen wir nun die gegebenen Größen ein, so erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} I_2' &= -3I_2 + \sin(t), \qquad I_2(0) = 0, \\ I_3' &= I_2 - I_3, \qquad I_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Eine einfache Methode, dieses System zu lösen, wäre wohl die Eliminationsmethode anzuwenden. Die Eigenwertmethode ist hier ein wenig aufwändiger, wie wir im Folgenden sehen werden. Die zum obigen System gehörige Matrix ist $A := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -1$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{Kern}(A+3I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\operatorname{Kern}(A+I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & 0 \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten, wollen wir nun noch die 'Variation der Konstanten'-Formel anwenden. Mit

$$\Phi(s)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3s} & 0 \\ e^{s} & 2e^{s} \end{pmatrix}$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
\vec{I}_{\mathrm{p}}(t) &= \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\begin{pmatrix} \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} e^{3s}\sin(s) \\ e^{s}\sin(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\Phi(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{1}{10}e^{3s}\big(3\sin(s)-\cos(s)\big)\right]_0^t \\ \left[\frac{1}{2}e^{s}\big(\sin(s)-\cos(s)\big)\right]_0^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Phi(t)\begin{pmatrix} \frac{1}{10}e^{3t}\big(3\sin(t)-\cos(t)\big)+\frac{1}{10} \\ \frac{1}{2}e^{t}\big(\sin(t)-\cos(t)\big)+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{10}e^{-3t}+\frac{3}{10}\sin(t)-\frac{1}{10}\cos(t) \\ \frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{20}e^{-3t}+\frac{1}{10}\sin(t)-\frac{1}{5}\cos(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies führt auf die Lösung

$$\vec{I}(t) = \begin{pmatrix} I_2(t) \\ I_3(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{I}_{\mathrm{p}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}e^{-3t}+\frac{3}{10}\sin(t)-\frac{1}{10}\cos(t) \\ \frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{20}e^{-3t}+\frac{1}{10}\sin(t)-\frac{1}{5}\cos(t) \end{pmatrix},$$

sowie $I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{20}e^{-3t} + \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{3}{10}\cos(t)$.

Aufgabe 29 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

Wir berechnen zunächst ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, wobei wir $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gesetzt haben. Die Eigenwerte von A sind offensichtlich $\lambda_1 = 1$ (mit

Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 3$ (mit Vielfachheit 2). Der Eigenraum zu λ_1 ist

$$E_A(1) = \mathrm{Kern}(A - I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

d.h. die erste Fundamentallösung ist

$$\vec{\phi}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu λ_2 ist gegeben durch

$$E_A(3) = \mathrm{Kern}(A - 3I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

welcher eindimensional ist daher zunächst nur eine weitere Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert. Weiter ist

$$\mathrm{Kern}(A - 3I)^2 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

und wir erhalten als dritte Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A - 3I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \vec{\phi}_3(t) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit

$$\vec{y}_{\mathrm{hom}}(t) = \Phi(t)\vec{c} = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + c_3\vec{\phi}_3(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung $\vec{y}_p$ der inhomogenen Gleichung lässt sich nun mit Variation der Konstanten bestimmen. Nach Vorlesung gilt

$$\vec{y}_{\mathrm{p}}(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Mit

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned}\vec{y}_{\mathrm{p}}(t) &= \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} se^{-s} \\ 3se^{-3s} - s \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \Phi(t)\begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} + 1 \\ -te^{-3t} - \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t - 1 + e^t \\ -t - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t^2e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_{\mathrm{p}}(t) + \vec{y}_{\mathrm{hom}}(t) = \begin{pmatrix} -t - 1 + e^t \\ -t - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t^2e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1 = 1,\, c_2 = 2,\, c_3 = 0.$$

Und als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -t - 1 + 2e^t \\ -t - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t^2e^{3t} + \frac{7}{3}e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}.$$