Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
15.01.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 30 (Übung)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sin(2x-3t) \qquad && x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= xe^x && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 31 (Tutorium)

a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= xe^y \qquad && (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= x+1 && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x},t) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{x},t) &= t^2(x-y+z) \qquad && \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x},0) &= e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} && \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 32 (Übung)

Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} t\partial_t u(x,t) + \tfrac{t}{xu(x,t)}\partial_x u(x,t) + u(x,t) &= 0, \qquad && x,t > 0, \\ u(\xi,\xi^2) &= 1, && \xi > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 33 (Tutorium)

Wir betrachten die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u(x,t) + x^2\partial_x u(x,t) + 2xu(x,t) = 0, \qquad x,t > 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x), \qquad x > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren.

Aufgabe 34 (Übung)

Wir betrachten ein Verkehrssystem. Dabei bezeichnen wir mit $\rho(x,t)$ die Anzahl der Fahrzeuge pro Längeneinheit am Ort x und zur Zeit t, d.h. die Dichte der Fahrzeuge. Mit $q(x,t)$ bezeichnen wir die Anzahl der Fahrzeuge pro Zeiteinheit am Ort x und zur Zeit t, was dem Fluss der Fahrzeuge entspricht.

a) Zeigen Sie das Erhaltungsgesetz

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x q(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

b) Die Geschwindigkeit der Fahrzeuge modellieren wir als

$$v(x,t) = v_{\max}\left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}}\right),$$

wobei $v_{\max}$ die Maximalgeschwindigkeit ist und $\rho_{\max}$ die maximale Fahrzeugdichte bezeichnet, bei der der Verkehr zum Erliegen kommt. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = v(x,t) - v_{\max}\frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} = v_{\max}\left(1 - \frac{2\rho(x,t)}{\rho_{\max}}\right)$$

eine Lösung der Burger-Gleichung

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

ist.

c) Finden Sie unter Verwendung des Charakteristikenverfahrens eine Lösung der Burger-Gleichung für $0 < t < 1$ und mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq 0, \\ 1-x, & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 35 (Tutorium)

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Gleichung

$$\Delta u(\vec{x}) = -1, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$