Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
15.01.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 30 (Übung)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
3\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sin(2x-3t) && x,t \in \mathbb{R}, \\
u(x,0) &= xe^x && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Lösungsvorschlag

Das gegebene Anfangswertproblem lässt sich in der Form eines linearen Transportproblems äquivalent schreiben:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \underbrace{\frac{3}{2}}_{=:a}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2}\sin(2x-3t) =: g(x,t) && x,t \in \mathbb{R}, \\
u(x,0) &= xe^x =: f(x) && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Nach der Vorlesung ist seine Lösung durch

$$
u(x,t) = f(x-ta) + \int_0^t g(x-(t-\tau)a, \tau)\,d\tau \qquad x,t \in \mathbb{R}
$$

gegeben. Wir berechnen

$$
\frac{1}{2}\int_0^t \sin\left(2\left(x-(t-\tau)\frac{3}{2}\right)-3\tau\right)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2x-3t)\,d\tau = \frac{t}{2}\sin(2x-3t) \qquad x,t \in \mathbb{R},
$$

womit

$$
u(x,t) = \left(x-\frac{3t}{2}\right)e^{x-\frac{3t}{2}} + \frac{t}{2}\sin(2x-3t) \qquad x,t \in \mathbb{R}
$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems definiert.

Aufgabe 31 (Tutorium)

a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= xe^y && (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\
u(x,0) &= x+1 && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x},t) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{x},t) = t^2(x-y+z) \qquad \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R},$$
$$u(\vec{x},0) = e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Lösungsvorschlag

a) Wir ersetzen formal y gegen t. Dann lautet das gegebene Randwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \underbrace{(-1)}_{=:a}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -xe^t =: g(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u(x,0) = x+1 =: f(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Seine Lösung ist nach der Vorlesung durch

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x-ta) + \int_0^t g(x-(t-\tau)a,\tau)\,d\tau \\
&= (x+t)+1 - \int_0^t (x+(t-\tau))e^\tau\,d\tau \\
&= x+t+1-(x+t)\,[e^\tau]_{\tau=0}^t + \int_0^t \underbrace{\tau}_{u}\underbrace{e^\tau}_{v'}\,d\tau \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} 2(x+t)+1-(x+t)e^t + [\tau e^\tau]_{\tau=0}^t - \int_0^t e^\tau\,d\tau \\
&= 2(x+t)+1-(x+t)e^t + te^t - e^t + 1 \\
&= 2(x+t+1)-(x+1)e^t
\end{aligned}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

b) Es liegt das lineare Transportproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{=:\vec{a}} \cdot \nabla u(\vec{x},t) = t^2 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \cdot \vec{x} =: g(\vec{x},t) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R},$$
$$u(\vec{x},0) = e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} =: f(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

vor. Seine Lösung ist nach der Vorlesung durch

$$\begin{aligned}
u(\vec{x},t) &= f(\vec{x}-t\vec{a})+\int_0^t g(\vec{x}-(t-\tau)\vec{a},\tau)\,d\tau \\
&= e^{-\frac{(x-t)^2+(y-2t)^2+(z-t)^2}{2}}+\int_0^t \tau^2\vec{b}\cdot(\vec{x}-(t-\tau)\vec{a})\,d\tau \\
&= e^{-\frac{(x-t)^2+(y-2t)^2+(z-t)^2}{2}}+\int_0^t \tau^2\vec{b}\cdot\vec{x}\,d\tau-\int_0^t \tau^2(t-\tau)\underbrace{(\vec{b}\cdot\vec{a})}_{=0}\,d\tau \\
&= e^{-\frac{(x-t)^2+(y-2t)^2+(z-t)^2}{2}}+\frac{1}{3}t^3(x-y+z)
\end{aligned}$$

für alle $\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ und alle $t\in\mathbb{R}$ gegeben.

Aufgabe 32 (Übung)

Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
t\partial_t u(x,t)+\tfrac{t}{xu(x,t)}\partial_x u(x,t)+u(x,t)=0, &\qquad x,t>0,\\
u(\xi,\xi^2)=1, &\qquad \xi>0.
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag

Hier liegt eine quasilineare Differentialgleichung der Form

$$\vec{a}(x,t,u)\cdot\nabla u=b(x,t,u) \qquad (x,t)\in D,$$

für $u=u(x,t)$ vor, mit

$$\vec{a}(x,t,u)=\begin{pmatrix}\frac{t}{xu}\\ t\end{pmatrix},\quad b(x,t,u)=-u,\quad \text{und}\quad D:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0,t>0\}.$$

Eine Parametrisierung von $\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}$, also der Ansatz $\vec{k}(s):=\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}$ und $w(s):=u(\vec{k}(s))$, führt dann gemäß Vorlesung auf das charakteristische System

$$\begin{aligned}
k_1'(s)&=\frac{k_2(s)}{k_1(s)w(s)},\\
k_2'(s)&=k_2(s),\\
w'(s)&=-w(s).
\end{aligned}$$

Für jedes feste $\xi>0$ wählen wir als Anfangsbedingung die Werte

$$k_1(0)=\xi,\qquad k_2(0)=\xi^2,\qquad w(0)=1,$$

da auf der Kurve $\Gamma:=\left\{(\xi,\xi^2),\xi>0\right\}$ die Anfangswerte vorgegeben sind. Damit erhalten wir zunächst

$$k_2(s)=c_2e^s,\quad c_2\in\mathbb{R},$$

und $k_2(0)=\xi^2$ liefert,

$$k_2(s)=\xi^2e^s.$$

Für w folgt

$$w(s) = c_3 e^{-s}, \quad c_3 \in \mathbb{R},$$

sowie $w(0) = c_3 \overset{!}{=} 1$, d.h. es ist

$$w(s) = e^{-s}.$$

Setzen wir dies in die erste Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$k_1'(s) = \xi^2 e^{2s} \frac{1}{k_1(s)},$$

welches wir mit Trennung der Variablen lösen können. Hier finden wir (beachte $k_1(s) = x > 0$)

$$k_1(s) = \sqrt{\xi^2 e^{2s} + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

sowie $k_1(0) = \sqrt{\xi^2 + c_1} \overset{!}{=} \xi \iff c_1 = 0$, d.h.

$$k_1(s) = \xi e^s.$$

Damit sind die Grundcharakteristiken gegeben durch

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi^2 e^s \end{pmatrix},$$

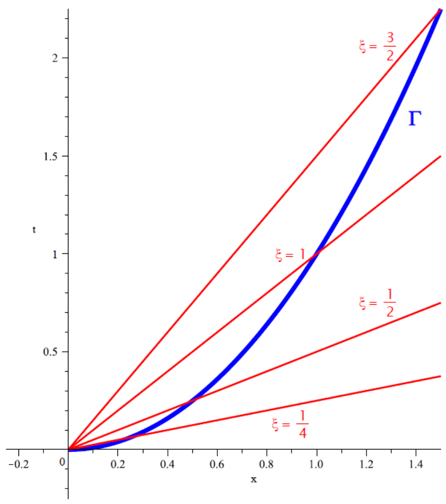
und es gilt

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \iff \xi e^s = x,\ \xi^2 e^s = t \iff \xi = x e^{-s},\ e^s = \frac{t}{\xi^2} \iff \xi = \frac{t}{x},\ s = \log\left(\tfrac{x^2}{t}\right)$$

So weit hätten wir hier aber eigentlich gar nicht umformen brauchen, da wir lediglich $e^{-s} = \frac{t}{x^2}$ benötigen. Damit erhalten wir nämlich die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = e^{-s} = \frac{t}{x^2}, \quad (x,t) \in D.$$

Anmerkung: Für die Grundcharakteristiken gilt hier (wenn wir s eliminieren) $t = \xi^2 e^s = \xi x$. Halten wir also ξ fest, so entsprechen die Grundcharakteristiken in der (x,t)-Ebene Geraden mit Steigung ξ. Siehe Skizze:



Aufgabe 33 (Tutorium)

Wir betrachten die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u(x,t) + x^2 \partial_x u(x,t) + 2xu(x,t) = 0, \qquad x,t > 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x), \qquad x > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren.

Lösungsvorschlag

Das charakteristische System dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s)^2, \\ k_2'(s) &= 1, \\ w'(s) &= -2k_1(s)w(s), \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$k_1(0) = \xi, \quad k_2(0) = 0, \quad w(0) = \sin(\xi)$$

für $\xi > 0$. Mit Trennung der Variablen erhalten wir für die erste Gleichung die allgemeine Lösung

$$k_1(s) = -\frac{1}{s+c_1}, \quad s < -c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Der Anfangswert liefert $k_1(0) = -\frac{1}{c_1} \stackrel{!}{=} \xi \iff c_1 = -\frac{1}{\xi}$, und somit

$$k_1(s) = -\frac{1}{s - \frac{1}{\xi}} = \frac{\xi}{1 - s\xi}, \quad s < \frac{1}{\xi}$$

Für k_2 erhalten wir als allgemeine Lösung $k_2(s) = s + c_2$ und aus dem Anfangswert folgt $c_2 = 0$. D.h.

$$k_2(s) = s,.$$

Die letzte Gleichung ergibt sich nun nach Einsetzen zu

$$w'(s) = \frac{2\xi}{s\xi - 1} w(s),$$

welche die allgemeine Lösung $w(s) = c_3(s\xi - 1)^2$ besitzt. Hier gilt nun $w(0) = c_3 \stackrel{!}{=} \sin(\xi)$, also erhalten wir

$$w(s) = \sin(\xi)(s\xi - 1)^2, \quad s < \frac{1}{\xi}.$$

Die Einschränkung für s kommt vom Definitionsbereich des Koeffizienten der Differentialgleichung. Für die Grundcharakteristiken gilt dann

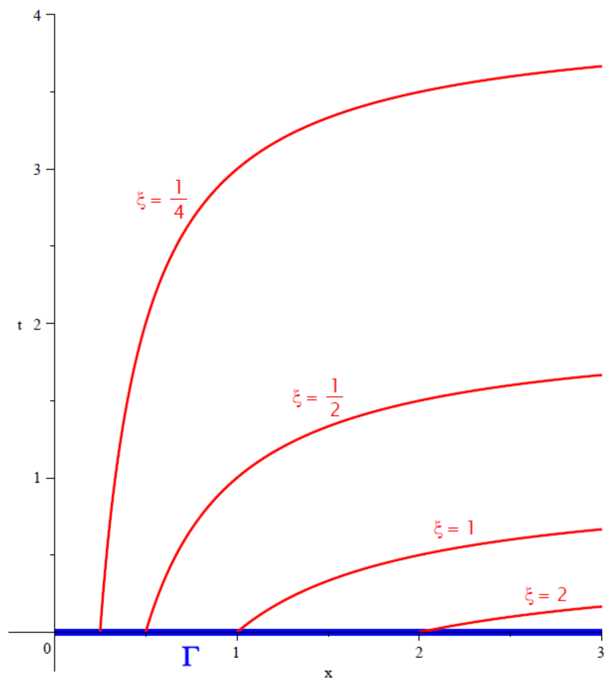
$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{1-s\xi} \\ s \end{pmatrix} \iff x = \frac{\xi}{1-s\xi},\ t = s \iff \xi = \frac{x}{1+tx},\ s = t.$$

Dabei ist $\xi = \frac{x}{1+tx} > 0$ und $s = t = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\xi}$ (Auflösen der ersten Gleichung nach t), womit für alle $x,t > 0$ ein Paar (s,ξ) in der erlaubten Menge $\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi > 0, s < \frac{1}{\xi}$ gefunden werden kann.

Eisetzen in w, liefert dann die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = \sin\left(\tfrac{x}{1+tx}\right)\left(\tfrac{tx}{1+tx} - 1\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{1+tx}\right)}{(1+tx)^2}.$$

Anmerkung: Die Elimination von s in den Grundcharakteristiken liefert hier den Zusammenhang $t = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi}$ für jedes feste $\xi > 0$. Für ausgewählte ξ erhalten wir dann in der (x,t)-Ebene das folgende Schaubild:



Aufgabe 34 (Übung)

Wir betrachten ein Verkehrssystem. Dabei bezeichnen wir mit $\rho(x,t)$ die Anzahl der Fahrzeuge pro Längeneinheit am Ort x und zur Zeit t, d.h. die Dichte der Fahrzeuge. Mit $q(x,t)$ bezeichnen wir die Anzahl der Fahrzeuge pro Zeiteinheit am Ort x und zur Zeit t, was dem Fluss der Fahrzeuge entspricht.

a) Zeigen Sie das Erhaltungsgesetz

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x q(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

b) Die Geschwindigkeit der Fahrzeuge modellieren wir als

$$v(x,t) = v_{\max}\left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}}\right),$$

wobei $v_{\max}$ die Maximalgeschwindigkeit ist und $\rho_{\max}$ die maximale Fahrzeugdichte bezeichnet, bei der der Verkehr zum Erliegen kommt. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = v(x,t) - v_{\max}\frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}} = v_{\max}\left(1 - \frac{2\rho(x,t)}{\rho_{\max}}\right)$$

eine Lösung der Burger-Gleichung

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

ist.

c) Finden Sie unter Verwendung des Charakteristikenverfahrens eine Lösung der Burger-Gleichung für $0 < t < 1$ und mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq 0, \\ 1-x, & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, beliebig. Dann befinden sich in dem Interall $[a, b]$ zum Zeitpunkt t

$$N(t) = \int_a^b \rho(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Fahrzeuge. Weiter ist

$$N'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \partial_t\rho(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Außerdem entspricht die zeiliche Änderungsrate im Intervall $[a, b]$ zum Zeitpunkt t gerade der Differenz des Flusses an den Randpunkten, d.h.

$$N'(t) = q(a,t) - q(b,t) = -\int_a^b \partial_x q(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Damit folgt

$$\int_a^b \partial_t\rho(x,t) + \partial_x q(x,t)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, und somit ist auch

$$\partial_t\rho(x,t) + \partial_x q(x,t) = 0.$$

b) Es gilt

$$q(x,t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(x,t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}(x,t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(x,t) = \rho(x,t)v(x,t).$$

und somit

$$\begin{aligned}\partial_x q(x,t) &= (\partial_x\rho)(x,t)v(x,t) + \rho(x,t)(\partial_x v)(x,t) = (\partial_x\rho)(x,t)v(x,t) - \rho(x,t)v_{\max}\frac{(\partial_x\rho)(x,t)}{\rho_{\max}} \\ &= (\partial_x\rho)(x,t)\left(v(x,t) - v_{\max}\frac{\rho(x,t)}{\rho_{\max}}\right) = (\partial_x\rho)(x,t)u(x,t).\end{aligned}$$

Dies liefert dann

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) &= -2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\partial_t \rho(x,t) - 2u(x,t)\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\partial_x \rho(x,t) \\
&= -2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\Big(\partial_t \rho(x,t) + u(x,t)\partial_x \rho(x,t)\Big) = -2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\Big(\partial_t \rho(x,t) + \partial_x q(x,t)\Big) \\
&\overset{\text{a)}}{=} 0.
\end{aligned}$$

c) Das charakteristische System dieser Gleichung samt Anfangsbedingungen lautet hier

$$\begin{aligned}
&k_1'(s) = w(s), \qquad k_1(0) = \xi, \\
&k_2'(s) = 1, \qquad k_2(0) = 0, \\
&w'(s) = 0, \qquad w(0) = \left\{ \begin{array}{cl} 1, & \text{für } \xi \leq 0, \\ 1-\xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ 0, & \text{für } \xi \geq 1, \end{array} \right\} =: f(\xi).
\end{aligned}$$

Als Lösung für k_2 erhalten wir hier

$$k_2(s) = s,$$

und für w erhalten wir die konstante Lösung

$$w(s) = f(\xi).$$

Setzen wir dies nun in die erste Gleichung ein, so erhalten wir hier die Differentialgleichung

$$k_1'(s) = f(\xi),$$

welche die allgemeine Lösung

$$k_1(s) = sf(\xi) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

besitzt. Setzen wir hier noch den Anfangswert ein, so folgt $k_1(0) = c_1 \overset{!}{=} \xi$, also

$$k_1(s) = sf(\xi) + \xi = \begin{cases} s+\xi, & \text{für } \xi \leq 0, \\ s - s\xi + \xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ \xi, & \text{für } \xi \geq 1, \end{cases}$$

Damit erhalten wir für $t < 1$

$$\begin{aligned}
&\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\
\iff\ & x = \begin{cases} s+\xi, & \text{für } \xi \leq 0, \\ s - s\xi + \xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ \xi, & \text{für } \xi \geq 1, \end{cases} \qquad t = s \\
\iff\ & x = \begin{cases} t+\xi, & \text{für } \xi \leq 0, \\ t + (1-t)\xi, & \text{für } 0 < \xi < 1, \\ \xi, & \text{für } \xi \geq 1, \end{cases} \qquad s = t \\
\iff\ & \xi = \begin{cases} x-t, & \text{für } x - t \leq 0 \iff x \leq t, \\ \frac{x-t}{1-t}, & \text{für } 0 < \frac{x-t}{1-t} < 1 \iff t < x < 1, \\ x, & \text{für } x \geq 1. \end{cases} \qquad s = t.
\end{aligned}$$

Dies führt auf die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \le t, \\ 1 - \frac{x-t}{1-t}, & \text{für } t < x < 1, \\ 0, & \text{für } x \ge 1, \end{cases} \Bigg\} = \begin{cases} 1, & \text{für } x \le t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{für } t < x < 1, \\ 0, & \text{für } x \ge 1 \end{cases} \qquad \text{für } t < 1.$$

Aufgabe 35 (Tutorium)

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Gleichung

$$\Delta u(\vec{x}) = -1, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Lösungsvorschlag

Radialsymmetrische Funktionen sind von der Form

$$u(\vec{x}) = g\Big(\|\vec{x}\|\Big),$$

mit

$$\begin{aligned} \partial_j u(\vec{x}) &= g'\Big(\|\vec{x}\|\Big)\frac{x_j}{\|\vec{x}\|}, \\ \partial_{jj} u(\vec{x}) &= g''\Big(\|\vec{x}\|\Big)\frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^2} + g'\Big(\|\vec{x}\|\Big)\bigg(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^3}\bigg). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Delta u(\vec{x}) = g''\Big(\|\vec{x}\|\Big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} g'\Big(\|\vec{x}\|\Big).$$

Es reicht hier also zunächst die Gleichung

$$g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r) = -1$$

zu betrachten. Die Substitution $h(r) := g'(r)$ führt dann auf die inhomogenen lineare Differentialgleichung

$$h'(r) = \frac{(1-n)}{r} h(r) - 1,$$

deren zugehörigen homogene Gleichung die allgemeine Lösung

$$h_{\text{hom}}(r) = c_1 \exp\bigg(\int \frac{1-n}{r}\,\mathrm{d}r\bigg) = c_1 r^{1-n}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

besitzt. Eine spezielle Lösung können wir nun mit Variation der Konstanten finden. Der Ansatz $h_{\text{p}}(r) = c(r) r^{1-n}$ führt dann auf die Gleichung

$$c'(r) r^{1-n} = -1 \iff c'(r) = -r^{n-1} \iff c(r) = -\frac{1}{n} r^n \text{ (+const.)}$$

und wir erhalten $h_{\text{p}}(r) = -\frac{1}{n} r$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für h ist somit

$$h(r) = -\frac{1}{n} r + c_1 r^{1-n}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Für g erhalten wir dann

$$g(r) = \int h(r)\,\mathrm{d}r = \begin{cases} -\frac{1}{4}r^2 + c_1 \log r + c_2, & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{2n}r^2 + c_1 \frac{1}{2-n} r^{2-n} + c_2, & \text{für } n \neq 2, \end{cases} \qquad r \neq 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

bzw. die Lösung

$$u(\vec{x}) = g\big(\|\vec{x}\|\big), \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$