Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
29.01.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 36 (Übung)

a) Seien $0 < d < R < d'$, $q' \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$\Gamma(\vec{x} - d\vec{e}_z) + q'\Gamma(\vec{x} - d'\vec{e}_z) = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{x}\| = R$, wobei Γ die Grundlösung der Laplace-Gleichung bezeichnet. Bestimmen Sie d' und q'. Ermitteln Sie daraus die Greensche Funktion von $B(\vec{0}, R) \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) Sei $R > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(x, y) = \frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{4\pi R} \frac{1}{\|\vec{x} - y\|^3} \qquad x \in B(\vec{0}, R),\, y \in \partial B(\vec{0}, R)$$

gilt. Dabei bezeichne G die Greensche Funktion für die Kugel $B(\vec{0}, R) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 37 (Tutorium)

Die Telegraphengleichung

$$\partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) + 2\partial_t u(x,t) + u(x,t) = 0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist nun die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$ für $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Zeigen Sie, dass ein Separationsansatz der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ nicht zu einer Lösung führt.

b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Ansatzes $u(x,t) = u_0 e^{-ax}\sin(2t - bx)$ mit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 38 (Übung)

Auf dem Kreisring $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ betrachten wir das Dirichletsche Problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x,y) &= 1 + 3x + 8xy \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 1 + 2\ln 2 + 3x + \tfrac{1}{2}xy \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Rechnen Sie das System zunächst in Polarkoordinaten um und lösen Sie es anschließend mit einem Separationsansatz.

Hinweis: In Polarkoordinaten gilt $\Delta v(r,\varphi) = \frac{\partial^2 v}{(\partial r)^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{(\partial\varphi)^2}(r,\varphi)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 39 (Tutorium)

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \qquad x^2+y^2>1, \\ u(x,y) &= x, \qquad x^2+y^2=1, \end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.

Aufgabe 40 (Übung)

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems mit einem Separationsansatz:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) = 0, &\qquad 0<x<1, t>0, \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0 &\qquad \text{für } t>0, \\ u(x,0) = \cos(\pi x), &\qquad \text{für } 0<x<1. \end{aligned}$$

Aufgabe 41 (Tutorium)

a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung

$$\partial_{tt} u(\vec{x},t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t) = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe des Separationsansatzes $u(\vec{x},t) = e^{ikt} v(\vec{x})$, $k \in \mathbb{R}$, auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

führt.

b) Finden Sie Lösungen zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$v(x_1,0) = v(x_1,b) = v(0,x_2) = v(a,x_2) = 0$$

für $a,b>0$, indem Sie einen Separationsansatz benutzen.

Erinnerung

- Am **07.03.2016** von **11 bis 13** Uhr findet die **Modulprüfung** statt.
- Als Hilftmittel zugelassen sind **zwei** beidseitig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
- Die Anmeldung ist **ab sofort** online im QISPOS möglich.
- **Anmeldeschluss** ist der **13.02.2016**.
- Die **Hörsaalverteilung** wird am **19.02.2016** unter der auf der Webseite der Vorlesung verlinkten Seite und am Brett neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.