Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
29.01.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 36 (Übung)

a) Seien $0 < d < R < d'$, $q' \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$\Gamma(\vec{x} - d\vec{e}_z) + q'\Gamma(\vec{x} - d'\vec{e}_z) = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{x}\| = R$, wobei Γ die Grundlösung der Laplace-Gleichung bezeichnet. Bestimmen Sie d' und q'. Ermitteln Sie daraus die Greensche Funktion von $B(\vec{0}, R) \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) Sei $R > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(x, y) = \frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{4\pi R} \frac{1}{\|\vec{x} - y\|^3} \qquad x \in B(\vec{0}, R),\, y \in \partial B(\vec{0}, R)$$

gilt. Dabei bezeichne G die Greensche Funktion für die Kugel $B(\vec{0}, R) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag

a) Nach Vorlesung ist

$$\Gamma(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \qquad \left(\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}\right).$$

Aus der gegebenen Gleichheit erhalten wir damit durch Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned}
\Gamma(\vec{x} - d\vec{e}_z) + q'\Gamma(\vec{x} - d'\vec{e}_z) &= 0 \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x} - d\vec{e}_z\|} - \frac{q'}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x} - d'\vec{e}_z\|} &= 0 \\
\Leftrightarrow q'\|\vec{x} - d\vec{e}_z\| &= -\|\vec{x} - d'\vec{e}_z\|
\end{aligned}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{x}\| = R$. Einsetzen von $\vec{x} \in \{R\vec{e}_z, -R\vec{e}_z\}$ liefert

$$\begin{aligned}
q'(R - d) &= -d' + R, \\
q'(R + d) &= -R - d'.
\end{aligned}$$

Summen- und Differenzbildung der beiden obigen Gleichungen liefert

$$\begin{aligned}
q'R &= -d', \\
q'd &= -R.
\end{aligned}$$

Letzte Gleichung kann nach q' umgestellt werden: $q' = -\frac{R}{d}$. Einsetzen in die vorletzte Gleichung ergibt $d' = \frac{R^2}{d}$. Auch wenn dies nach Aufgabenstellung nicht verlangt ist, so kann man nun einfach nachrechnen, dass die Gleichung tatsächlich für alle $\vec{x}$ erfüllt ist.

$$\Gamma(\vec{x}-d\vec{e}_z)-\frac{R}{d}\Gamma(\vec{x}-\frac{R^2}{d}\vec{e}_z) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\frac{d}{R}\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{R^2}{d})^2}}$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-2zd+d^2}}+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\frac{d}{R}\sqrt{R^2-\frac{2zR^2}{d}+\frac{R^4}{d^2}}} = 0$$

Da die gewählte Richtung $\vec{e_z}$ beliebig ist, können wir de_z durch $\vec{y}$ mit $\|\vec{y}\| = d < R$ ersetzen und sehen, dass

$$0 = \Gamma(\vec{x}-d\vec{e}_z)-\frac{R}{d}\Gamma(\vec{x}-\frac{R^2}{d}\vec{e}_z) = \Gamma(\vec{x}-\vec{y})-\frac{R}{d}\Gamma(\vec{x}-\frac{R^2}{d^2}\vec{y}) = \Gamma(\vec{x}-\vec{y})-\Gamma(\frac{d}{R}\vec{x}-\frac{R}{d}\vec{y})$$
$$= \Gamma(\vec{x}-\vec{y})-\Gamma(\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}-\frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y})$$

Definieren wir nun

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(\vec{x}-\vec{y})-\Gamma(\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}-\frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}) & \text{für } \vec{x}\in\mathbb{R}^3, \vec{x}\neq\vec{y}\neq\vec{0}, \\ \Gamma(\vec{x})-\Gamma(R) & \text{für } \vec{y}=\vec{0}, \vec{x}\neq\vec{0}, \end{cases}$$

so ist G symmetrisch (Nachrechnen unter Verwendung des Skalarprodukts für die Norm) und für festes $\vec{y}\in B(\vec{0},R)$ gilt $G(\vec{x},\vec{y}) = 0$ ($x\in\partial B(\vec{0},R)$ (klar für $\vec{y}=0$, für $\vec{y}\neq 0$ folgt es aus obiger Gleichung, die die Definition motiviert) und die Funktion

$$h(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{x},\vec{y})-\Gamma(\vec{x}-\vec{y}) = \begin{cases} -\Gamma(\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}-\frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}) & \text{für } \vec{x}\in\mathbb{R}^3, \vec{x}\neq\vec{y}\neq\vec{0}, \\ -\Gamma(R) & \text{für } \vec{y}=\vec{0}, \vec{x}\neq\vec{0}, \end{cases}$$

ist harmonisch in $B(\vec{0},R)$ bzgl. x für jedes feste $\vec{y}\in B(\vec{0},R)$, da es sich um eine Konstante Funktion ($\vec{y}=0$) bzw. um die harmonische Grundlösung der Laplacegleichung handelt, deren Argument skaliert und translatiert wird (die zweiten partiellen Ableitungen liefern lediglich den zusätzlichen Faktor $\frac{\|\vec{y}\|^2}{R^2}$ vor der zweiten partiellen Ableitung der Grundlösung). Zu beachten ist dabei, dass die Singularität der Funktion bei $\vec{x} = \frac{R^2}{\|\vec{y}\|^2}\vec{y}$ liegt, was wegen $\|\vec{x}\| = \frac{R^2}{\|\vec{y}\|} > R$ nicht in $B(\vec{0},R)$ liegt. Somit definiert G tatsächlich eine Greensche Funktion auf der Kreisscheibe $B(\vec{0},R)$ für alle $R > 0$.

b) Nach **a)** gilt

$$G(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{y}\|}-\frac{1}{\|\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}-\frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}\|}\right) & \text{für } \vec{x}\in\mathbb{R}^3, \vec{x}\neq\vec{y}\neq\vec{0}, \\ -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\|\vec{x}\|}-\frac{1}{R}\right) & \text{für } \vec{y}=\vec{0}, \vec{x}\neq\vec{0}. \end{cases}$$

Der Normaleneinheitsvektor $\vec{N}$ auf der Sphäre $\partial B(\vec{0},R)$ im Punkt $\vec{y}\in\partial B(\vec{0},R)$ ist durch $\vec{N} = \frac{\vec{y}}{R}$ gegeben. Es gilt ferner

$$(\nabla\|\cdot\|)(\vec{z}) = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|} \qquad \left(\vec{z}\in\mathbb{R}^3\setminus\left\{\vec{0}\right\}\right). \tag{0.1}$$

Wir zeigen die Identität aus der Aufgabenstellung zunächst für $\vec{x}=\vec{0}$. Es gilt in der Tat

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_{\vec{y}}}(\vec{0},\vec{y}) = (\nabla_{\vec{y}}G)(\vec{0},\vec{y})\cdot\frac{\vec{y}}{R} = \frac{1}{4\pi}\left[\nabla_{\vec{y}}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\|\vec{y}\|}\right)\right]\cdot\frac{\vec{y}}{R} \overset{(0.1)}{=} \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|^3}\cdot\frac{\vec{y}}{R} = \frac{1}{4\pi R^2}$$

für alle $\vec{y}\in\partial B(\vec{0},R)$.
Für $\vec{x}\neq\vec{0}$ und $\vec{0}\neq\vec{y}\neq\vec{x}$ gilt

$$\|\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}-\frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}\|^2 = \frac{\|\vec{y}\|^2\,\|\vec{x}\|^2}{R^2} - 2\,(\vec{x}|\vec{y}) + R^2 = \|\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y}-\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}\|^2. \tag{0.2}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_{\vec{y}}}(\vec{x},\vec{y}) \quad &= \quad (\nabla_{\vec{y}}G)(\vec{x},\vec{y})\cdot\frac{\vec{y}}{R} = -\frac{1}{4\pi}\left[\nabla_{\vec{y}}\left(\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{y}\|}-\frac{1}{\|\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}-\frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}\|}\right)\right]\cdot\frac{\vec{y}}{R}\\
&\overset{(0.2)}{=} \quad -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}-\nabla_{\vec{y}}\left(\frac{1}{\|\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y}-\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}\|}\right)\right]\cdot\frac{\vec{y}}{R}\\
&= \quad -\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{(\vec{x}|\vec{y})-\|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}+\vec{y}\cdot\left(\frac{\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y}-\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}}{\|\frac{\|\vec{x}\|}{R}\vec{y}-\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}\|^3}\right)\frac{\|\vec{x}\|}{R}\right]\\
&\overset{(0.2)}{=} \quad -\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{(\vec{x}|\vec{y})-R^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}+\frac{R\,\|\vec{x}\|-\frac{R}{\|\vec{x}\|}\,(\vec{x}|\vec{y})}{\|\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}-\frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}\|^3}\frac{\|\vec{x}\|}{R}\right]\\
&\overset{\|\vec{y}\|=R}{=} \quad -\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{(\vec{x}|\vec{y})-R^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}+\frac{\|\vec{x}^2\|-(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}\right] = \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}
\end{aligned}$$

für alle $\vec{x}\neq\vec{0}$ und alle $\vec{y}\in\partial B(\vec{0},R)$.

Aufgabe 37 (Tutorium)

Die Telegraphengleichung

$$\partial_{tt}u(x,t)-\partial_{xx}u(x,t)+2\partial_t u(x,t)+u(x,t)=0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x>0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist nun die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x=0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t)=3\sin(2t)$ für $t\geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x\to\infty$ beschränkt sein.

a) Zeigen Sie, dass ein Separationsansatz der Form $u(x,t)=v(x)w(t)$ nicht zu einer Lösung führt.

b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Ansatzes $u(x,t)=u_0e^{-ax}\sin(2t-bx)$ mit $a>0$, $b\in\mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag

a) Machen wir einen Separationsansatz der Form

$$u(x,t) = v(x)w(t),$$

so können wir wegen der Randbedingung $v = 0$ und $w = 0$ ausschließen (insb. ist auch $v(0) \neq 0$). Außerdem folgt

$$u(0,t) = v(0)w(t) \overset{!}{=} 3\sin(2t) \iff w(t) = \frac{3}{v(0)}\sin(2t).$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \frac{6}{v(0)}v(x)\cos(2t),\\
\partial_{tt} u(x,t) &= -\frac{12}{v(0)}v(x)\sin(2t),\\
\partial_{xx} u(x,t) &= \frac{3}{v(0)}v''(x)\sin(2t),
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) + 2\partial_t u(x,t) + u(x,t)\\
&\quad= -\frac{12}{v(0)}v(x)\sin(2t) - \frac{3}{v(0)}v''(x)\sin(2t) + \frac{12}{v(0)}v(x)\cos(2t) + \frac{3}{v(0)}v(x)\sin(2t)\\
&\quad= \left(-\frac{9}{v(0)}v(x) - \frac{3}{v(0)}v''(x)\right)\sin(2t) + \frac{12}{v(0)}v(x)\cos(2t) \overset{!}{=} 0\\
&\iff -\frac{9}{v(0)}v(x) - \frac{3}{v(0)}v''(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{12}{v(0)}v(x) = 0 \iff v = 0,
\end{aligned}$$

was wir anfangs ausgeschlossen haben. Also führt der Separationsansatz hier zu keiner Lösung.

b) Versuchen wir hingegen den Ansatz

$$u(x,t) = u_0 e^{-ax}\sin(2t - bx), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

so folgt mit der Randbedingung zunächst $u_0 = 3$ und die Beschränktheit der Lösung liefert $a \geq 0$. Weiter haben wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= 6e^{-ax}\cos(2t - bx),\\
\partial_{tt} u(x,t) &= -12e^{-ax}\sin(2t - bx),\\
\partial_x u(x,t) &= -3ae^{-ax}\sin(2t - bx) - 3be^{-ax}\cos(2t - bx),\\
\partial_{xx} u(x,t) &= 3(a^2 - b^2)e^{-ax}\sin(2t - bx) + 6abe^{-ax}\cos(2t - bx).
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$\begin{aligned}
&\partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) + 2\partial_t u(x,t) + u(x,t) \\
&\quad = -12e^{-ax}\sin(2t-bx) - 3(a^2-b^2)e^{-ax}\sin(2t-bx) - 6abe^{-ax}\cos(2t-bx) \\
&\qquad + 12e^{-ax}\cos(2t-bx) + 3e^{-ax}\sin(2t-bx) \\
&\quad = e^{-ax}\Big((3b^2-3a^2-9)\sin(2t-bx) + (12-6ab)\cos(2t-bx)\Big) \overset{!}{=} 0 \\
&\iff 3b^2-3a^2-9=0 \quad \text{und} \quad 12-6ab=0, \\
&\overset{a\geq 0}{\iff} a=1, \quad b=2.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = 3e^{-x}\sin(2t-2x).$$

Aufgabe 38 (Übung)

Auf dem Kreisring $D := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\Big\}$ betrachten wir das Dirichletsche Problem

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0, \qquad 1 < x^2+y^2 < 4, \\
u(x,y) &= 1+3x+8xy \qquad \text{für } x^2+y^2=1, \\
u(x,y) &= 1+2\log 2+3x+\tfrac{1}{2}xy \qquad \text{für } x^2+y^2=4.
\end{aligned}$$

Rechnen Sie das System zunächst in Polarkoordinaten um und lösen Sie es anschließend mit einem Separationsansatz.
Hinweis: In Polarkoordinaten gilt $\Delta v(r,\varphi) = \frac{\partial^2 v}{(\partial r)^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{(\partial\varphi)^2}(r,\varphi)$.

Lösungsvorschlag

Für $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $1<r<2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, folgt nach dem Hinweis

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) = \partial_{rr}v(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi) = 0 \\
\iff r^2\partial_{rr}v(r,\varphi) + r\partial_r v(r,\varphi) + \partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi) = 0.
\end{aligned}$$

Für die Randbedingungen erhalten wir für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}
v(r,\varphi) &= 1+3r\cos\varphi+8r^2\cos\varphi\sin\varphi = 1+3r\cos\varphi+4r^2\sin 2\varphi, \quad \text{für } r=1, \\
v(r,\varphi) &= 1+2\log 2+3r\cos\varphi+\frac{1}{2}r^2\cos\varphi\sin\varphi = 1+2\log 2+3r\cos\varphi+\frac{1}{4}r^2\sin 2\varphi, \quad \text{für } r=2.
\end{aligned}$$

D.h. für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&r^2\partial_{rr}v(r,\varphi) + r\partial_r v(r,\varphi) + \partial_{\varphi\varphi}v(r,\varphi) = 0, \quad 1<r<2, \\
&v(1,\varphi) = 1+3\cos\varphi+4\sin 2\varphi, \\
&v(2,\varphi) = 1+2\log 2+6\cos\varphi+\sin 2\varphi.
\end{aligned}$$

Für v machen wir nun den Separationsansatz

$$v(r,\varphi) = g(r)h(\varphi),$$

wobei $g, h \neq 0$ (da sonst die Randbedingungen nicht erfüllt sind) und h eine 2π-periodische Funktion sein soll (da $v(r,0) = v(r,2\pi)$ gelten muss). Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$r^2 g''(r)h(\varphi) + rg'(r)h(\varphi) + g(r)h''(\varphi) = 0 \iff \frac{r^2 g''(r) + rg'(r)}{g(r)} = -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nun nicht von φ und die rechte nicht von r ab. Da aber beide Seiten für alle r, φ übereinstimmen, hängen beide Ausdrücke weder von r noch von φ ab. D.h. es gibt eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{r^2 g''(r) + rg'(r)}{g(r)} &= \lambda \iff r^2 g''(r) + rg'(r) - \lambda g(r) = 0, \quad \text{(Euler-Dgl.)} \\ -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} &= \lambda \iff h''(\varphi) = -\lambda h(\varphi). \quad \text{(lineare Dgl. mit konst. Koeff.)} \end{aligned}$$

Wir lösen zunächst die zweite dieser beiden Gleichungen.
Ist $\lambda < 0$, so lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$h(\varphi) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese ist aber nur für $c_1 = c_2 = 0$ 2π-periodisch, und dann wäre $h = 0$. Dies haben wir allerdings wegen der Randbedingungen bereits ausgeschlossen.
Ist $\lambda = 0$, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$h(\varphi) = c_1 \varphi + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

und diese Funktion ist nur dann periodisch, falls $c_1 = 0$.
Ist $\lambda > 0$, so lautet die allgemeine Lösung

$$h(\varphi) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

welche genau dann 2π-periodisch ist, falls $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$.
Die zweite Gleichung hat also genau dann eine 2π-periodische Lösung $w \neq 0$, falls $\lambda = n^2$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Wir erhalten dann die Lösungen

$$h_n(\varphi) = a_n \cos(n\varphi) + \widetilde{a}_n \sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_n, \widetilde{a}_n \in \mathbb{R}.$$

Da die Gleichungen durch λ gekoppelt sind, brauchen wir auch bei der ersten Gleichung nur noch die Werte $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, betrachten. Ist $n = 0$, so lautet die allgemeine Lösung der ersten Gleichung

$$g_0(r) = b_0 + \widetilde{b}_0 \log r, \quad b_0, \widetilde{b}_0 \in \mathbb{R}.$$

Im anderen Fall $n \neq 0$, erhalten wir die Lösung

$$g_n(r) = b_n r^n + \widetilde{b}_n r^{-n}, \quad b_n, \widetilde{b}_n \in \mathbb{R}.$$

D.h. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$v_n(r,\varphi) = g_n(r)h_n(\varphi)$$

eine Lösung. Durch Aufsummieren erhalten wir dann die allgemeine Lösung

$$v(r,\varphi) = c_0 + \widetilde{c}_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + \widetilde{c}_n r^{-n}) \cos(n\varphi) + (d_n r^n + \widetilde{d}_n r^{-n}) \sin(n\varphi), \quad c_n, \widetilde{c}_n, d_n, \widetilde{d}_n \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun die Randbedingungen ein, so folgt

$$v(1,\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \widetilde{c}_n)\cos(n\varphi) + (d_n + \widetilde{d}_n)\sin(n\varphi) \stackrel{!}{=} 1 + 3\cos\varphi + 4\sin 2\varphi$$
$$\iff c_0 = 1,\ c_1 + \widetilde{c}_1 = 3,\ d_2 + \widetilde{d}_2 = 4,\ c_n + \widetilde{c}_n = 0\ (n \neq 1),\ d_n + \widetilde{d}_n = 0\ (n \neq 2),$$

sowie

$$v(2,\varphi) = 1 + \widetilde{c}_0 \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n 2^n + \widetilde{c}_n \tfrac{1}{2^n})\cos(n\varphi) + (d_n 2^n + \widetilde{d}_n \tfrac{1}{2^n})\sin(n\varphi) \stackrel{!}{=} 1 + 2\log 2 + 6\cos\varphi + \sin 2\varphi$$
$$\iff \widetilde{c}_0 = 2,\ 2c_1 + \tfrac{1}{2}\widetilde{c}_1 = 6,\ 4d_2 + \tfrac{1}{4}\widetilde{d}_2 = 1,\ 2^n c_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{c}_n = 0\ (n \neq 1),\ 2^n d_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{d}_n = 0\ (n \neq 2),$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
c_1 + \widetilde{c}_1 = 3,\ 2c_1 + \tfrac{1}{2}\widetilde{c}_1 = 6 &\iff c_1 = 3,\ \widetilde{c}_1 = 0,\\
d_2 + \widetilde{d}_2 = 4,\ 4d_2 + \tfrac{1}{4}\widetilde{d}_2 = 1 &\iff d_2 = 0,\ \widetilde{d}_2 = 4,\\
c_n + \widetilde{c}_n = 0,\ 2^n c_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{c}_n = 0 &\iff c_n = 0,\ \widetilde{c}_n = 0,\\
d_n + \widetilde{d}_n = 0,\ 2^n d_n + \tfrac{1}{2^n}\widetilde{d}_n = 0 &\iff d_n = 0,\ \widetilde{d}_n = 0.
\end{aligned}$$

Dies führt uns dann auf die Lösung

$$\begin{aligned}
v(r,\varphi) &= 1 + 2\log r + 3r\cos(\varphi) + \frac{4}{r^2}\sin 2\varphi\\
&= 1 + 2\log r + 3r\cos(\varphi) + \frac{8}{r^4}(r\cos\varphi)(r\sin\varphi),
\end{aligned}$$

bzw. auf die Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$u(x,y) = 1 + 2\log\sqrt{x^2+y^2} + 3x + \frac{8xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Aufgabe 39 (Tutorium)

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0, & x^2+y^2 &> 1,\\
u(x,y) &= x, & x^2+y^2 &= 1,
\end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.

Lösungsvorschlag

Wir machen den Separationsansatz $v(r,\varphi) = v_1(r)v_2(\varphi)$. Da wir an nichttrivialen Lösungen interessiert sind, gibt es Punkte $r > 1$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$, sodass dort v_1 und v_2 nicht Null sind. Laut dem

Hinweis der letzten Aufgabe gilt dann

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{\partial^2 v}{(\partial r)^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{(\partial \varphi)^2}(r,\varphi) \\
&= v_1''(r)v_2(\varphi) + \frac{v_2(\varphi)}{r}v_1'(r) + \frac{v_1(r)}{r^2}v_2''(\varphi) \overset{!}{=} 0 \qquad (r>1,\ \varphi \in (0,2\pi)) \\
\Rightarrow \frac{v_2''(\varphi)}{v_2(\varphi)} &= -\left(\frac{r^2 v_1''(r)}{v_1(r)} + \frac{r v_1'(r)}{v_1(r)}\right)
\end{aligned}$$

Somit müssen beide Seiten konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ sein und es folgt

$$v_2(\varphi) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\varphi} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\varphi} \qquad (\varphi \in (0,2\pi))$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Damit u auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, muss

$$\lim_{\varphi\to 0+} v_2(\varphi) = \lim_{\varphi \to 2\pi-} v_2(\varphi) \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi\to 0+} v_2'(\varphi) = \lim_{\varphi \to 2\pi-} v_2'(\varphi)$$

gelten. Für die erste Gleichung muss entweder $\lambda = 0$ (und wegen der zweiten Gleichung dann $v_2(\varphi) = C_2$) sein oder $\lambda < 0$, was mit der zweiten Gleichung

$$\lambda = -k^2 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}$$

ergibt und somit $v_{2,k}(\varphi) = C_1 \sin(k\varphi) + C_2 \cos(k\varphi)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.
Ferner ergibt sich

$$r^2 v_1''(r) + r v_1'(r) + \lambda v_1(r) = 0 \qquad (r > 1).$$

Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung für v_1. Wir substituieren deshalb $r = e^s$, $w(s) = v_1(e^s)$ für $s \in \mathbb{R}$. Es folgt $w'(s) = e^s v_1'(e^s) = r v_1'(r)$ und $w''(s) = e^s v_1'(e^s) + e^{2s} v_1''(e^s) = r v_1'(e^s) + r^2 v_1''(e^s)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$w''(s) + \lambda w(s) = 0 \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Für $\lambda = 0$ ist also

$$w(s) = C_1 s + C_2 \qquad (s \in \mathbb{R}),$$

und für $\lambda = -k^2 < 0$ ist

$$w(s) = C_1 e^{ks} + C_2 e^{-ks} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Resubstituieren liefert

$$v_1(r) = \begin{cases} C_1 \log(r) + C_2, & \text{falls } k = 0, \\ C_1 r^{-k} + C_2 r^k, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (r > 1).$$

Da die Laplace-Gleichung linear ist, machen wir den Ansatz (alle Summanden der Teillösungen multiplizieren und die verschiedenen Werte für k addieren)

$$\begin{aligned}
v(r,\varphi) &= C_0 + C_1 \log(r) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)} r^k \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)} r^k \sin(k\varphi) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)} r^{-k} \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)} r^{-k} \sin(k\varphi)
\end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $N \in \mathbb{N}, C_0, C_1, C_1^{(1)}, \ldots, C_N^{(1)}, C_1^{(2)}, \ldots, C_N^{(2)}, C_1^{(3)}, \ldots, C_N^{(3)}, C_1^{(4)}, \ldots, C_N^{(4)} \in \mathbb{R}$.
Da die Terme $\log(r)$, $r^k \cos(k\varphi)$ und $r^k \sin(k\varphi)$ unbeschränkt sind, können sie nicht vorkommen. Die Randbedingung $u(x,y) = x$ für $x^2 + y^2 = 1$ lautet in Polarkoordinaten $v(1,\varphi) = \cos(\varphi)$ für $\varphi \in (0,\varphi)$. Einsetzen von $r = 1$ in den Ansatz und Vergleich mit der Randbedingung liefert $N = 1$, $C_0 = 0$, $C_1^{(4)} = 0$, $C_1^{(3)} = 1$, also

$$v(r,\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{r} \qquad (r \geq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

bzw.

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2 \geq 1).$$

Aufgabe 40 (Übung)

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems mit einem Separationsansatz:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \partial_{xx} u(x,t) &= 0, \qquad 0 < x < 1, t > 0, \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) &= 0 \qquad \text{für } t > 0, \\ u(x,0) &= \cos(\pi x), \qquad \text{für } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag

Der Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ mit $v, w \neq 0$ (u erfüllt sonst die Randbedingung nicht), liefert uns

$$v(x)w'(t) - v''(x)w(t) = 0 \iff \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt, sie aber für alle x, t übereinstimmen, hängen beide Ausdrücke weder von x noch von t ab. Also existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{v''(x)}{v(x)} &= \lambda \iff v''(x) = \lambda v(x), \\ \frac{w'(t)}{w(t)} &= \lambda \iff w'(t) = \lambda w(t). \end{aligned}$$

Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen haben die allgemeinen Lösungen

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{und} \quad w(t) = c_3 e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Hier kann man auch bereits $\lambda = 0$ ausschließen, da sonst $u(x,0) = \cos(\pi x)$ nicht erfüllt sein könnte. Aus den Randbedingungen $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0$ folgt $v'(0) = v'(1) = 0$. Mit

$$v'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} v'(0) = \sqrt{\lambda}(c_1 - c_2) = 0 &\iff c_1 = c_2, \\ v'(1) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 &\iff e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \\ &\iff 2\sqrt{\lambda} = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\iff \lambda = -\pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen

$$v_n(x) = c_1 e^{\pi i n x} + c_1 e^{-\pi i n x} = 2c_1 \cos(\pi n x), \quad w_n(t) = c_3 e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Aufsummieren liefert die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = \cos(\pi x)$ erhalten wir nach Koeffizientenvergleich $a_1 = 1$ und $a_n = 0$ sonst. Insgesamt führt dies auf die Lösung

$$u(x,t) = \cos(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

Aufgabe 41 (Tutorium)

a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung

$$\partial_{tt} u(\vec{x},t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t) = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe des Separationsansatzes $u(\vec{x},t) = e^{ikt} v(\vec{x})$, $k \in \mathbb{R}$, auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

führt.

b) Finden Sie Lösungen zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$v(x_1, 0) = v(x_1, b) = v(0, x_2) = v(a, x_2) = 0$$

für $a, b > 0$, indem Sie einen Separationsansatz benutzen.

Lösungsvorschlag

a) Ist $u(\vec{x},t) = e^{ikt} v(\vec{x})$ für ein $k \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\partial_t u(\vec{x},t) = ike^{ikt} v(\vec{x}), \quad \partial_{tt} u(\vec{x},t) = -k^2 e^{ikt} v(\vec{x}), \quad \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t) = e^{ikt} \Delta v(\vec{x}).$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\partial_{tt} u(\vec{x},t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x},t) = -k^2 e^{ikt} v(\vec{x}) - e^{ikt} \Delta v(\vec{x}) \stackrel{!}{=} 0 \iff k^2 v(\vec{x}) + \Delta v(\vec{x}) = 0.$$

b) Machen wir nun den Ansatz

$$v(\vec{x}) = g(x_1) h(x_2)$$

so stellen wir zunächst fest, dass $g = 0$ und $h = 0$ die Lösung $v = 0$ liefern. Nehmen wir im Folgenden nun an, dass $g \neq 0$ und $h \neq 0$ ist, so folgt

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = g''(x_1) h(x_2) + g(x_1) h''(x_2) + k^2 g(x_1) h(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \iff \frac{g''(x_1)}{g(x_1)} = -\frac{h''(x_2)}{h(x_2)} - k^2.$$

Da beide Seiten jeweils nur von einer Variable abhängen, existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\frac{g''(x_1)}{g(x_1)} = \lambda &\iff g''(x_1) = \lambda g(x_1),\\ -\frac{h''(x_2)}{h(x_2)} - k^2 = \lambda &\iff h''(x_2) = -(k^2+\lambda)h(x_2).\end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}g(x_1) &= c_1 e^{\sqrt{\lambda}x_1} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x_1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\\ h(x_2) &= c_3 e^{\sqrt{-k^2-\lambda}x_2} + c_4 e^{-\sqrt{-k^2-\lambda}x_2}, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Die Randbedingungen $v(0,x_2) = v(a,x_2) = 0$ bzw. $v(x_1,0) = v(x_1,b) = 0$ liefern $g(0) = g(a) = 0$ bzw. $h(0) = h(b) = 0$. Setzen wir diese ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}g(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0 &\iff c_2 = -c_1,\\ g(a) = c_1 e^{a\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-a\sqrt{\lambda}} \overset{!}{=} 0 &\iff 2a\sqrt{\lambda} = 2\pi i M, \quad M \in \mathbb{N}\\ &\iff \lambda = -\pi^2 \frac{M^2}{a^2}, \quad M \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}h(0) = c_3 + c_4 \overset{!}{=} 0 &\iff c_4 = -c_3,\\ h(b) = c_3 e^{b\sqrt{-k^2-\lambda}} - c_3 e^{-b\sqrt{-k^2-\lambda}} \overset{!}{=} 0 &\iff 2b\sqrt{-k^2-\lambda} = 2\pi i N, \quad N \in \mathbb{N}\\ &\iff -k^2 - \lambda = -\pi^2 \frac{N^2}{b^2}, \quad N \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Dies führt uns auf

$$\begin{aligned}g_M(x_1) &= c_1 e^{i\pi\frac{M}{a}x_1} - c_1 e^{-i\pi\frac{M}{a}x_1} = a_M \sin\Big(\tfrac{\pi M}{a}x_1\Big),\\ h_N(x_2) &= c_3 e^{i\pi\frac{N}{b}x_2} - c_3 e^{-i\pi\frac{N}{b}x_2} = b_N \sin\Big(\tfrac{\pi N}{b}x_2\Big),\end{aligned}$$

für $M, N \in \mathbb{N}$ mit $k^2 = \pi^2\frac{M^2}{a^2} + \pi^2\frac{N^2}{b^2}$. Aufsummieren liefert uns dann die allgemeine Lösung

$$v(\vec{x}) = \sum_{M,N} c_{M,N} \sin\Big(\tfrac{\pi M}{a}x_1\Big)\sin\Big(\tfrac{\pi N}{b}x_2\Big),$$

wobei die Summe über alle Paare $(M,N) \in \mathbb{N}^2$ läuft mit $k^2 = \pi^2\frac{M^2}{a^2} + \pi^2\frac{N^2}{b^2}$.