Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Karlsruher Institut für Technologie

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2016/17

03.11.2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1:
Ein Teilchen der Masse $m > 0$ erfahre bei einer eindimensionalen Bewegung durch ein Medium die Reibungskraft
$$F_R = -kv^2$$
wobei $k > 0$ eine Konstante und v die Geschwindigkeit des Teilchens bezeichne. Es wirken keine weiteren Kräfte auf das Teilchen. Die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens sei durch $v_0 > 0$ gegeben.

Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit des Teilchens auf und lösen Sie diese.

Lösung:
Nach der Grundgleichung der Mechanik gilt $F = ma$, wobei F die Summe aller auf das Teilchen wirkender Kräfte und $a = \dot{v}$ seine Beschleunigung ist. Die einzige wirkende Kraft ist $F_R = -kv^2$. Nach Division durch m erhalten wir die Differentialgleichung
$$\dot{v} = -\frac{kv^2}{m}.$$
mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Wir lösen diese Differentialgleichung durch Trennen der Veränderlichen und erhalten
$$\int \frac{dv}{v^2} = \int -\frac{k}{m} dt + C,$$
also
$$-\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t + C \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t - C}.$$
Die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ liefert schließlich $C = -\frac{1}{v_0}$ und somit die Lösung
$$v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}} \quad (t \in (-\tfrac{m}{kv_0}\, \infty)).$$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3$ $(x > 0)$,

(ii) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$,

(iii) $(1 - x^2)y' + 2xy = x^2 + 1$
Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung einer speziellen Lösung den Ansatz $y(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(i) Da $x > 0$ ist, erhalten wir die homogene Differentialgleichung

$$y' = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\right) y$$

und die zugehörige Lösung

$$y_h(x) = C \exp\left(\int \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\right) dx\right) = Cx^3 e^{x^{-2}} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Eine spezielle Lösung finden wir mit Hilfe des Ansatzes $y_p(x) = C(x)x^3 e^{x^{-2}}$ (Variation der Konstanten). Einsetzten in die Differentialgleichung liefert die Bedingung $C'(x) = x^{-3}e^{-x^{-2}}$ und somit $C(x) = \frac{1}{2}e^{-x^{-2}}$. Damit lautet die spezielle Lösung $y_p(x) = \frac{1}{2}x^3$ und die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx^3 e^{x^{-2}} + \frac{1}{2}x^3 \quad (C \in \mathbb{R}).$$

(ii) Die Lösung der homogenen Gleichung lässt sich wie folgt berechnen:

$$y_h(x) = C \exp\left(-\int \cos x \; dx\right) = Ce^{-\sin x} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir eine spezielle Lösung: Wie verwenden den Ansatz $y_p(x) = C(x)e^{-\sin x}$ und erhalten $C'(x) = \sin x \cos x \; e^{\sin x}$, bzw. mit partieller Integration

$$C(x) = \int \sin x \left(\cos x \; e^{\sin x}\right) = \sin x \; e^{\sin x} - \int \cos x \; e^{\sin x} = (\sin x - 1)e^{\sin x}.$$

Damit lautet eine spezielle Lösung $y_p(x) = \sin x - 1$ und damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1 \quad (C \in \mathbb{R}).$$

(iii) Für $x \neq \pm 1$ erhalten wir die Lösung der homogenen Gleichung $(1 - x^2)y' + 2xy = 0$ durch

$$y_h(x) = C \exp\left(\int -\frac{2x}{1 - x^2} dx\right) = C \exp(\log\left|1 - x^2\right|) = C(1 - x^2) \quad (C \in \mathbb{R}).$$

y_h erfüllt die homogene Differentialgleichung auch für $x = \pm 1$ und somit ist dies eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung zu finden, verwenden wir den angegebenen Ansatz $y_p(x) = ax + b$ und erhalten durch Einsetzen

$$ax^2 + bx + a = x^2 + 1,$$

also $a = 1$ und $b = 0$. Damit ist $y_p(x) = x$ eine spezielle Lösung und

$$y(x) = C(1 - x^2) + x \quad (C \in \mathbb{R})$$

allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 3:
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

(i) $\log(y') = x - y - e^y, \quad y(1) = 0,$

(ii) $xy(1+x^2)y' = 1 + y^2, \quad y(1) = 2,$

(iii) $y' = -\frac{2y}{x} + 4x, \quad y(\sqrt{2}) = 3.$

Lösung:

(i) Durch Anwenden der Exponentialfunktion erhält man die äquivalente Differentialgleichung

$$y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}.$$

Da dies eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen ist, liefert die Darstellung $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$e^y e^{e^y} dy = e^x dx.$$

Damit erhalten wir die Lösungen der Differentialgleichung aus

$$\int e^y e^{e^y} dy = \int e^x dx + C \quad (C \in \mathbb{R}),$$

also $e^{e^y} = e^x + C$, wobei die Konstante C so gewählt wird, sodass $y(1) = 0$ gilt. Wir erhalten also $e^{e^0} = e^1 + C$ und somit $C = 0$. Auflösen nach y liefert schließlich die auf $(0, \infty)$ definierte Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = \log(\log(e^x + C)) = \log x \quad (x \in (0, \infty)).$$

(ii) Wir trennen zur Lösung die Variablen und erhalten

$$\int \frac{y}{1+y^2} dx = \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Für den rechten Integranden verwenden wir die Partialbruchzerlegung und erhalten

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

und somit

$$\frac{1}{2}\log(1+y^2) = \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$
$$\Leftrightarrow 1 + y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} e^{2C}.$$

Verwenden der Anfangsbedingung liefert schließlich

$$5 = \frac{e^{2C}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 10 = e^{2C} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\log(10)}{2},$$

und somit

$$y^2 = \frac{10x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{9x^2 - 1}{1+x^2}.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y(x) = \sqrt{\frac{9x^2-1}{1+x^2}} \quad (x \in (\tfrac{1}{3}, \infty)),$$

denn es gilt $y(1) = 2 > 0$ (Vorzeichen beim Wurzelziehen positiv!).

(iii) Eine Lösung der homogenen Differentialgleichung erhalten wir durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x} + \tilde{C} \quad \text{bzw.} \quad \log y = -2 \log x + \tilde{C} \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R}),$$

das heißt

$$y_h(x) = e^{\tilde{C}} x^{-2} = C x^{-2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Variation der Konstanten liefert eine spezielle Lösung: Wir verwenden den Ansatz $y_p(x) = C(x)x^{-2}$ und erhalten

$$C'(x) = 4x^3 \quad \text{bzw.} \quad C(x) = x^4.$$

Damit ist $y_p(x) = x^2$ eine spezielle Lösung und

$$y(x) = \frac{C}{x^2} + x^2 \quad (C \in \mathbb{R})$$

eine allgemeine Lösung. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $C = 2$ und somit

$$y(x) = \frac{2}{x^2} + x^2 \quad (x \in (0, \infty)).$$

Aufgabe 4:

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

(i) $y' = 3y + e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1,$

(ii) $y' + xy + \frac{1}{2}(xy)^3 = 0, \quad y(0) = \sqrt{2},$

(iii) $y' + y^2 - xy - \frac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 1.$

Lösung:

(i) Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Wir multiplizieren mit $(1-\alpha)y^{-\alpha} = -y^{-2}$ und erhalten

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{3}{y} + e^{-x} = 0.$$

$z := y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}$ und $z' = -\frac{y'}{y}$ liefern schließlich das Anfangswertproblem

$$z' + 3z + e^{-x} = 0, \quad z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1.$$

Eine Lösung der homogenen Gleichung ist durch $z_h(x) = Ce^{-3x}$ $(C \in \mathbb{R})$ gegeben. Mit Variation der Konstanten können wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung berechnen: Wir machen den Ansatz $z_p(x) = C(x)e^{-3x}$. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir $C'(x) = -e^{2x}$ und damit $C(x) = -\frac{e^{2x}}{2}$. Insgesamt ist somit $z_p(x) = -\frac{e^{-x}}{2}$ eine spezielle Lösung. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$z(x) = Ce^{-3x} - \frac{e^{-x}}{2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Wir wählen C entsprechend der Anfangsbedingung $z(0) = 1$ und erhalten $C = \frac{3}{2}$. Wir suchen nun die Nullstellen von z:

$$z(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}(3e^{-2x} - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log 3}{2} > 0.$$

Damit ist die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{2}{3e^{-3x} - e^{-x}} \quad (x \in (-\infty, \tfrac{\log 3}{2})).$$

(ii) Hier handelt es sich wieder um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit $\alpha = 3$. Multiplizieren der Differentialgleichung mit $(1-\alpha)y^{-\alpha} = -2y^{-3}$ liefert

$$\frac{-2y'}{y^3} - \frac{2x}{y^2} - x^3 = 0.$$

Mit $z := y^{1-\alpha} = y^{-2}$ und $z' = \frac{-2y'}{y^3}$ erhalten wir

$$z' - 2xz = x^3, \quad z(0) = y(0)^{-2} = \frac{1}{2}.$$

Eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist durch

$$z_h(x) = C\exp\left(\int 2x dx\right) = Ce^{x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

gegeben. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch Variation der Konstanten: Wir verwenden den Ansatz $y_p(x) = C(x)e^{x^2}$. Durch einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir $C'(x) = x^3e^{-x^2}$. Wir suchen also eine Funktion $C(\cdot)$, welche dieser Bedingung genügt. (Partielle) Integration liefert:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 \left(xe^{-x^2}\right) dx \\ &= -\frac{x^2e^{-x^2}}{2} - \int 2x\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right) dx \\ &= -\frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die spezielle Lösung $z_p(x) = -\frac{(x^2+1)}{2}$, also die allgemeine Lösung

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = Ce^{x^2} - \frac{(x^2+1)}{2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{2}$ lässt sich schließlich die Konstante $C = 1$ passend berechnen. Wegen $y(0) = \sqrt{2} > 0$ ist die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems durch

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} - \frac{(x^2+1)}{2}}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben.

(iii) Es handelt sich erneut um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Analog zu obiger Rechnung erhalten wir:

$$-\frac{y'}{y^2} - 1 + \left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y} = 0 \quad \text{bzw.} \quad z' - 1 + \left(x + \frac{1}{x}\right)z = 0,$$

wobei $z = y^{-1}$. Die transformierte Anfangsbedingung lautet nun $z(1) = y(1)^{-1} = 1$. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$z_h(x) = C\exp\left(\int\left(-x - \frac{1}{x}\right)dx\right) = Cx^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (C \in \mathbb{R}),$$

wobei wir $x > 0$ annehmen. Eine spezielle Lösung liefert wieder die Variation der Konstanten. Damit erhalten wir

$$C'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{bzw.} \quad C(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

und somit $z_p(x) = x^{-1}$. Insgesamt gilt also $z(x) = Cx^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} + x^{-1}$. Die Anfangsbedingung liefert schließlich $C = 0$ und somit $z(x) = x^{-1}$, also $y(x) = \frac{1}{z(x)} = x$ $(x \in \mathbb{R})$.