Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2016/17

18.11.2016

Übungsblatt 3

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(i) $y'' - \frac{2}{x(1-x)^2}y = 0$, $(x \in (0,1))$
Hinweis: Zeigen Sie, dass $y_1(x) = \frac{x}{1-x}$ eine Lösung ist.

(ii) $xy'' - (1+2x)y' + (1+x)y = (1+x^2)e^x$
Hinweis: Zeigen Sie, dass $y_1(x) = e^x$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

(iii) $2xy'' + y' - 2y = 0$, $(x > 0)$
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = z(\sqrt{x})$.

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(i) $y'' - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)y' + \frac{2(2x-1)}{x^2-x+1}y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$
Hinweis: $y_1(x) = e^{2x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

(ii) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 2(1-x^2)^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
Hinweis: $y_1(x) = x$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(iii) $y'' - \left(4 + \frac{2}{x}\right)y' + \left(4 + \frac{4}{x}\right)y = 2e^{2x}$ $(x > 0)$, $y(1) = 0$, $y'(1) = e^2$,
Hinweis: $y_1(x) = e^{2x}$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Aufgabe 11:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y'' + y' - 12y = 6x^2 - 7x + 4$,

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 8\sin(2x)$,

(iii) $y''' - 2y'' + y' - 2y = -4\cos x - 2\sin x$
Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung einer speziellen Lösung den Ansatz $y(x) = x(a\cos x + b\sin x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 12:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $p, q \in \mathrm{C}(I)$. Weiter seien y_1 und y_2 Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (x \in I).$$

Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante w die Differentialgleichung $w' = -p(x)w$ auf I erfüllt und somit für alle $x_0, x \in I$ gilt:

$$w(x) = w(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} p(s)\ ds \right).$$

Folgern Sie daraus, dass entweder $w(x) = 0$ für alle $x \in I$ oder $w(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Die Aufgaben werden in der Übung am 01.12.2016 besprochen.