Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2016/17

01.12.2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 3

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(i) $y'' - \frac{2}{x(1-x)^2}y = 0$, $(x \in (0,1))$
Hinweis: Zeigen Sie, dass $y_1(x) = \frac{x}{1-x}$ eine Lösung ist.

(ii) $xy'' - (1+2x)y' + (1+x)y = (1+x^2)e^x$
Hinweis: Zeigen Sie, dass $y_1(x) = e^x$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

(iii) $2xy'' + y' - 2y = 0$, $(x > 0)$
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = z(\sqrt{x})$.

Lösung:

(i) Wir berechnen zunächst die Ableitungen von y_1 auf $(0,1)$:

$$y_1'(x) = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{und} \quad y_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Einsetzen in die DGL zeigt, dass y_1 eine Lösung ist:

$$\frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{x(1-x)^2}\cdot\frac{x}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^3} = 0.$$

Nach dem Reduktionsansatz von d'Alembert finden wir die allgemeine Lösung der DGL mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = v(x)y_1(x)$. Wegen

$$y' = v'y_1 + vy_1' \quad \text{und} \quad y'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

erhalten wir durch Einsetzen in die DGL:

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' - \frac{2}{x(1-x)^2}\cdot vy_1 = 0,$$

also

$$y_1v'' + 2y_1'v' + \underbrace{\left(y_1'' - \frac{2}{x(1-x)^2}y_1\right)}_{=0} v = 0,$$

wobei der Ausdruck in der Klammer 0 ist, da y_1 die DGL löst. Wir erhalten also eine lineare DGL für v':

$$y_1v'' + 2y_1'v' = 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{1-x}v'' + \frac{2}{x(1-x)^2}v' = 0,$$

also

$$v'' = \frac{2}{x(x-1)} v'.$$

Lösen dieser homogenen DGL liefert

$$\begin{aligned} v'(x) &= C \exp\left(\int \frac{2}{x(x-1)}\, dx \right) = C \exp\left(\int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}\, dx \right) \\ &= C \exp\left(\log|x-1| - 2\log|x|\right) = C \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 \quad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} v(x) &= \int C \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 dx + D = C \int 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\, dx + D \\ &= C \left(\frac{x^2-1}{x} - 2\log x \right) + D \quad (C, D \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist damit gegeben durch:

$$\begin{aligned} y(x) = v(x) y_1(x) &= C \left(\frac{x^2-1}{x} - 2\log x \right) \frac{x}{1-x} + D \frac{x}{1-x} \\ &= C \left(-(x+1) - \frac{2x \log x}{1-x} \right) + D \frac{x}{1-x} \\ &= -C \left(1 + x + \frac{2x \log x}{1-x} \right) + D \frac{x}{1-x} \quad (x \in (0,1),\ C, D \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(ii) Wegen

$$xe^x - (1+2x)e^x + (1+x)e^x = (x - 1 + 2x + 1 + x)e^x = 0.$$

ist y_1 Lösung der homogenen DGL. Die Reduktionsmethode von d'Alembert benutzt den Ansatz $y(x) = v(x) y_1(x)$ und liefert durch Einsetzen (siehe (i)):

$$\begin{aligned} & x(v'' x_1 + 2v' y_1' + v y_1'') - (1+2x)(v' y_1 + v y_1') + (1+x) v y_1 = (1+x^2) e^x \\ \Leftrightarrow & x y_1 v'' + (2x y_1' - (1+2x) y_1) v' + \underbrace{(x y_1'' - (1+2x) y_1' + (1+x) y_1)}_{=0} v = (1+x^2) e^x \\ \Leftrightarrow & x e^x v'' - e^x v' = (1+x^2) e^x. \end{aligned}$$

Das ist eine lineare DGL für $u := v'$, nämlich $xu' - u = 1 + x^2$. Eine homogene Lösung ist gegeben durch $u_h(x) = Cx$ mit $C \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung finden wir durch Variation der Konstanten: $u_p(x) = C(x)x$. Wir erhalten $C'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, also $C(x) = x - \frac{1}{x}$ und damit schließlich $u_p(x) = x^2 - 1$. Die allgemeine Lösung ist somit $u(x) = x^2 - 1 + Cx$ $(C \in \mathbb{R})$ und daraus erhalten wir

$$v(x) = \int u\, dx + D = \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{1}{2} C x^2 + D \quad (C, D \in \mathbb{R}).$$

Die allgemeine Lösung der ursprüngliche DGL ist somit gegeben durch

$$y(x) = v(x) y_1(x) = \left(\frac{1}{3} x^3 - x + \frac{1}{2} C x^2 + D \right) e^x \quad (x \in \mathbb{R},\ C, D \in \mathbb{R}).$$

(iii) Wir verwenden den angegebenen Ansatz $y(x) = z(\sqrt{x})$ und erhalten

$$y'(x) = \frac{z'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad y''(x) = \frac{\frac{z''(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} - h'(\sqrt{x}) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}}}{4x} = \frac{z''(\sqrt{x})}{4x} - \frac{z'(\sqrt{x})}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

Einsetzen liefert

$$2x\left(\frac{z''(\sqrt{x})}{4x} - \frac{z'(\sqrt{x})}{4x^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{z'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2z(\sqrt{x}) = 0$$

und mit $t = \sqrt{x}$ erhalten wir schließlich die lineare DGL 2. Ordnung: $z'' - 4z = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - 4$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2$. Damit ist $z(t) = Ce^{-2t} + De^{2t}$ mit $C, D \in \mathbb{R}$ allgemeine Lösung dieser DGL. Rücktransformation liefert schließlich die gesuchte Lösung der ursprünglichen DGL:

$$y(x) = z(\sqrt{x}) = Ce^{-2\sqrt{x}} + De^{2\sqrt{x}} \quad (x > 0,\ C, D \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(i) $y'' - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) y' + \frac{2(2x-1)}{x^2-x+1} y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$
Hinweis: $y_1(x) = e^{2x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

(ii) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 2(1 - x^2)^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
Hinweis: $y_1(x) = x$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(iii) $y'' - \left(4 + \frac{2}{x}\right) y' + \left(4 + \frac{4}{x}\right) y = 2e^{2x}$ $(x > 0)$, $y(1) = 0$, $y'(1) = e^2$,
Hinweis: $y_1(x) = e^{2x}$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Lösung:

(i) Wir verwenden die Reduktionsmethode von d'Alembert und machen deshalb wieder den Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$. Einsetzten in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned}
&v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)(v'y_1 + vy_1') + \frac{2(2x-1)}{x^2-x+1} vy_1 = 0 \\
\Leftrightarrow &y_1v'' + \left(2y_1' - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) y_1\right) v' \\
&\quad + \underbrace{\left(y_1'' - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) y_1' + \frac{2(2x-1)}{x^2-x+1} y_1\right)}_{=0} v = 0 \\
\Leftrightarrow &e^{2x}v'' + \left(4e^{2x} - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) e^{2x}\right) v' = 0 \\
\Leftrightarrow &v'' + \left(2 - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) v' = 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
v'(x) &= C \exp\left(\int -2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx\right) \\
&= C \exp\big(-2x + \log(\underbrace{x^2 - x + 1}_{>0})\big) \\
&= C(x^2 - x + 1)e^{-2x} \quad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich v durch mehrfache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int C(x^2 - x + 1)e^{-2x}\, dx + D \\
&= C\Big[-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2}\int (2x-1)e^{-2x}\, dx \Big] + D \\
&= C\Big[-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2 - x + 1) - \frac{1}{4}(2x-1)e^{-2x} + \frac{1}{4}\underbrace{\int 2e^{-2x}\, dx}_{=-e^{-2x}} \Big] + D \\
&= C\Big[-\frac{1}{2}(x^2 - x + 1) - \frac{1}{4}(2x-1) - \frac{1}{4}\Big] e^{2x} + D \\
&= C\Big[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\Big] e^{-2x} + D = -C\frac{1+x^2}{2}e^{-2x} + D \quad (C, D \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der ursprüngliche DGL durch

$$y(x) = v(x)y_1(x) = -C\frac{1+x^2}{2} + De^{2x} \quad (C, D \in \mathbb{R}).$$

Zum Schluss passen wir die Konstanten noch den Anfangswerten an:

$$-1 = y(0) = -\frac{C}{2} + D \quad \text{und} \quad 2 = y'(0) = 2D \Leftrightarrow D = 1,$$

also $C = 4$. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = -2(1 + x^2) + e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(ii) Wir nehmen zunächst $x \neq \pm 1$ an und teilen durch $(1 - x^2)$:

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 2(1-x^2).$$

Ausgehend von der Lösung $y_1(x) = x$ der homogenen DGL verwenden wir den Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$ (Verfahren von d'Alembert) um die allgemeine Lösung der DGL zu finden. Einsetzen in die DGL liefert:

$$\begin{aligned}
& v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + \frac{2x}{1-x^2}\left(v'y_1 + vy_1'\right) - \frac{2}{1-x^2}vy_1 = 2(1-x^2) \\
\Leftrightarrow & y_1v'' + \left(2y_1' + \frac{2x}{1-x^2}y_1\right)v' + \underbrace{\left(y_1'' + \frac{2x}{1-x^2}y_1' - \frac{2}{1-x^2}y_1\right)}_{=0} v = 2(1-x^2) \\
\Leftrightarrow & xv'' + 2\left(1 + \frac{x^2}{1-x^2}\right)v' = 2(1-x^2) \\
\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} & v'' + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}\right)v' = \frac{2(1-x^2)}{x}.
\end{aligned}$$

Wir lösen diese DGL für $u = v'$ und erhalten

$$\begin{aligned}
u_h(x) &= C\exp\left(\int -\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\, dx\right) \\
&= C\exp\left(-2\log x + \log(1-x^2)\right) = C\frac{1-x^2}{x^2} = C\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \quad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

und mit Variation der Konstanten $u_p(x) = 1 - x^2$. Insgesamt also

$$v'(x) = u(x) = 1 - x^2 + C\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} v(x) &= \int 1 - x^2 + C\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\, dx + D \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 - C\left(\frac{1}{x} + x\right) + D \quad (C, D \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL lautet dann

$$y(x) = v(x)y_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 - C\left(1 + x^2\right) + Dx \quad (C, D \in \mathbb{R}).$$

Wir sehen, dass diese Lösung die DGL auch für $x = \pm 1$ und $x = 0$ löst. Wir bestimmen noch die Konstanten durch Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$1 = y(0) = -C \Leftrightarrow C = -1 \quad \text{und} \quad 0 = y'(0) = D,$$

also lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \left(1 + x^2\right) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) Wir verwenden wieder das Verfahren von d'Alembert und machen den Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' - \left(4 + \frac{2}{x}\right)\left(v'y_1 + vy_1'\right) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)vy_1 = 2e^{2x} \\ \Leftrightarrow & y_1v'' + \left(2y_1' - \left(4 + \frac{2}{x}\right)y_1\right)v' + \underbrace{\left(y_1'' - \left(4 + \frac{2}{x}\right)y_1' + \left(4 + \frac{4}{x}\right)y_1\right)}_{=0}v = 2e^{2x} \\ \Leftrightarrow & e^{2x}v'' + \left(4e^{2x} - \left(4 + \frac{2}{x}\right)e^{2x}\right)v' = 2e^{2x} \\ \Leftrightarrow & v'' - \frac{2}{x}v' = 2. \end{aligned}$$

Lösen dieser linearen DGL 1. Ordnung für v' liefert $v'(x) = \tilde{C}x^2 - 2x$ für $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ (Homogene Lösung: Cx^2, Spezielle Lösung: $-2x$ (Variation der Konstanten)) und somit gilt $v(x) = Cx^3 - x^2 + D$ mit $C, D \in \mathbb{R}$. Damit ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL gegeben durch:

$$y(x) = (Cx^3 - x^2 + D)e^{2x} \quad (C, D \in \mathbb{R}).$$

Wir bestimmen noch die Konstanten entsprechend der Anfangsbedingungen und erhalten:

$$0 = y(1) = (C + D - 1)e^2 \quad \Leftrightarrow \quad C + D = 1$$

und

$$e^2 = y'(1) = (3C - 1 + 2C - 2 + 2D)e^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5C + 2D = 5,$$

insgesamt also $C = 1$ und $D = 0$ und somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = (x^3 - x^2)e^{2x} = (x - 1)x^2e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 11:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y'' + y' - 12y = 6x^2 - 7x + 4$,

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 8\sin(2x)$,

(iii) $y''' - 2y'' + y' - 2y = -4\cos x - 2\sin x$
Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung einer speziellen Lösung den Ansatz $y(x) = x(a\cos x + b\sin x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(i) Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet $\lambda^2 + \lambda - 12$. Damit ist
$$y_h(x) = Ae^{-4x} + Be^{3x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$
Lösung der homogenen Differentialgleichung. Um nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwenden wir den Ansatz $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert
$$-12ax^2 + (2a - 12b)x + (2a + b - 12c) = 6x^2 - 7x + 4.$$
Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich die gesuchten Konstanten $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = -\frac{3}{8}$. Die allgemeine Lösung lautet schließlich
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-4x} + Be^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}).$$

(ii) Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Damit ist
$$y_h(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$
Lösung der homogenen Differentialgleichung. Um nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwenden wir den Ansatz $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert
$$8a\sin(2x) - 8b\cos(2x) = 8\sin(2x).$$
Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich die gesuchten Konstanten $a = 1$ und $b = 0$. Die allgemeine Lösung lautet schließlich
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}).$$

(iii) Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung lautet
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - i)(\lambda + i).$$
Damit ist
$$y_h(x) = Ae^{2x} + B\sin x + C\cos x \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$
Lösung der homogenen Gleichung. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, mache wir den Ansatz
$$y_p(x) = x(a\cos x + b\sin x) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$
Einsetzen in die Differentialgleichung und anschließender Koeffizientenvergleich liefert $a = 0$ und $b = 1$, also $y_p(x) = x\sin x$. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch
$$Ae^{2x} + B\sin x + C\cos x + x\sin x \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B, C \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 12:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $p, q \in \mathrm{C}(I)$. Weiter seien y_1 und y_2 Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (x \in I).$$

Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante w die Differentialgleichung $w' = -p(x)w$ auf I erfüllt und somit für alle $x_0, x \in I$ gilt:

$$w(x) = w(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\ ds\right). \tag{$*$}$$

Folgern Sie daraus, dass entweder $w(x) = 0$ für alle $x \in I$ oder $w(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Lösung:
Die Wronski-Determinante zu y_1 und y_2 ist definiert als

$$w(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w' &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2 \\ &= -y_1(p(x)y_2' + q(x)y_2) + (p(x)y_1' + q(x)y_1)y_2 \\ &= -p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = -p(x)w, \end{aligned}$$

also löst w die angegebene Differentialgleichung. Außerdem ist die Lösung dieser DGL gerade durch die Formel in $(*)$ gegeben.

Da $\exp(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt folgt aus $(*)$, dass $w = 0 \Leftrightarrow w(x_0) = 0$, also gilt entweder $w(x) = 0$ für alle $x \in I$ oder $w(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.