Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2016/17

15.12.2016

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Aufgabe 13:
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(i) $x^2y'' + y = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1,$

(ii) $x^2y'' + xy' - y = \log x, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1,$

(iii) $x^2y^{(4)} + 5xy''' + y'' + \frac{2y'}{x} - \frac{2y}{x^2} = 0, \quad y(e) = 0,\ y'(e) = -1,\ y''(e) = -\frac{1}{e},\ y'''(e) = \frac{1}{e^2}.$

Lösung:

(i) Wir verwenden den Ansatz $x = e^t$ und erhalten durch Einsetzen:

$$e^{2t}y''(e^t) + y(e^t) = 0.$$

Wir setzen $z(t) := y(e^t)$. Dann gilt $z'(t) = e^ty'(e^t)$ und $z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t)$. Damit erhalten wir die DGL

$$z'' - z' + z = 0$$

für z. Diese homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \lambda + 1$, also erhalten wir die allgemeine Lösung

$$z(t) = Ae^{\frac{t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + Be^{\frac{t}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = z(\log x) = A\sqrt{x}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\log x) + B\sqrt{x}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\log x) \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt schließlich die Lösung

$$y(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\log x) \quad (x > 0).$$

(ii) Wir verwenden den Ansatz $x = e^t$ und erhalten durch Einsetzen:

$$e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t) - y(e^t) = t.$$

Wir setzen $z(t) := y(e^t)$. Dann gilt $z'(t) = e^ty'(e^t)$ und $z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t)$. Damit erhalten wir die DGL

$$z'' - z = t$$

für z. Diese inhomogene lineare DGL 2. Ordnung konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 1$, also erhalten wir die allgemeine Lösung

$$z(t) = Ae^t + Be^{-t} - t \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = z(\log x) = Ax + Bx^{-1} - \log x \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt schließlich die Lösung

$$y(x) = x + x^{-1} - \log x \quad (x > 0).$$

(iii) Multiplizieren der DGL mit x^2 liefert die Euler'sche DGL

$$x^4 y^{(4)} + 5x^3 y''' + x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Wir verwenden wieder den Ansatz $x = e^t$ und erhalten durch Einsetzen:

$$e^{4t} y^{(4)}(e^t) + 5e^{3t} y'''(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + 2e^t y'(e^t) - 2y(e^t) = 0.$$

Wir setzen $z(t) := y(e^t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z'(t) &= e^t y'(e^t), \\ z''(t) &= e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t), \\ z'''(t) &= e^{3t} y'''(e^t) + 3e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t), \\ z^{(4)} &= e^{4t} y^{(4)}(e^t) + 6e^{3t} y'''(e^t) + 7e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die DGL

$$z^{(4)} - z''' - 3z'' + 5z' - 2z = 0$$

für z. Diese inhomogene lineare DGL 2. Ordnung konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)$, also erhalten wir die allgemeine Lösung

$$z(t) = Ae^t + Bte^t + Ct^2 e^t + De^{-2t} \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}).$$

Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = z(\log x) = Ax + Bx \log x + Cx(\log x)^2 + Dx^{-2} \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt schließlich die Lösung

$$y(x) = x - x \log x = x(1 - \log x) \quad (x > 0).$$

Aufgabe 14:
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(i) $y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,$

(ii) $2y'' - xy' + 2y = 4 - x \cos x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$

(iii) $y'' - 4x^2 y = 6xe^{x^2}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Lösung:

(i) Wir verwenden den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und erhalten

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$
\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} & \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
= & 2a_2 - 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-3)a_n\right] x^n.
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$
2a_2 - 3a_0 = 0, \tag{1}
$$

$$
(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-3)a_n = 0 \quad (n \geq 1). \tag{2}
$$

Die Anfangsbedingungen ergeben $a_0 = y(0) = 0$ und $a_1 = y'(0) = 3$. Nach (1) gilt also $a_2 = 0$. Nach (2) erhalten wir die Rekursionsformel

$$
a_{n+2} = \frac{3-n}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n \geq 1),
$$

und mit den obigen Koeffizienten haben wir insgesamt $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ und $a_n = 0$ $(n \geq 4)$ und somit ist die Lösung gegeben durch

$$
y(x) = 3x + x^3.
$$

(ii) Wir verwenden den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$
\begin{aligned}
4 - x\cos x \overset{!}{=} & 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
= & 4a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2-n)a_n\right] x^n.
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich nach Verwenden der Reihendarstellung von $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$. Damit ist $x\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ mit

$$
b_n = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k \ (k \geq 1) \\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & \text{für } n = 2k+1 \ (k \geq 0) \end{cases}
$$

liefert

$$
4a_2 + 2a_0 = 4, \tag{3}
$$

$$
2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2-n)a_n = -b_n \quad (n \geq 1). \tag{4}
$$

Die Anfangsbedingungen ergeben $a_0 = y(0) = 0$ und $a_1 = y'(0) = 1$. Nach (3) gilt also $a_2 = 1$. Für gerades n gilt $b_n = 0$, also nach (4):

$$
a_{n+2} = \frac{n-2}{2(n+2)(n+1)} a_n,
$$

also folgt rekursiv $a_4 = a_6 = \ldots = 0$. Für ungerades $n = 2k+1$ lautet (4) schließlich

$$2(2k+3)(2k+2)a_{2k+3} + (1-2k)a_{2k+1} = -\frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k \geq 0).$$

Mit vollständiger Induktion beweist man die folgende explizite Darstellung:

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad (k \geq 0).$$

Insgesamt lautet die Lösung schließlich

$$y(x) = x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x^2 + \sin x.$$

(iii) Wir verwenden wieder den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und erhalten

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned}6xe^{x^2} \overset{!}{=} &\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 4\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}}_{=\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n} \\ =&2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 4a_{n-2}\right]x^n.\end{aligned}$$

Wir schreiben auch die rechte Seite der DGL in eine Potenzreihe und erhalten

$$6xe^{x^2} = 6x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{6}{k!}x^{2k+1}.$$

Die Anfangsbedingungen ergeben $a_0 = y(0) = 0$ und $a_1 = y'(0) = 1$. Koeffizientenvergleich liefert also $2a_2 = 0$ und $6a_3 = 6$, also $a_2 = 0$ und $a_3 = 1$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 4a_{n-2} = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k \ (k \geq 1) \\ \frac{6}{k!}, & \text{für } n = 2k+1 \ (k \geq 1) \end{cases}$$

Damit folgt für gerades n (mit $a_0 = a_2 = 0$) direkt $a_n = 0$. Für $n = 2k+1$ ungerade erhalten wir schließlich

$$a_{2k+3} = \frac{1}{(2k+3)(2k+2)}\left(\frac{6}{k!} + 4a_{2k-1}\right).$$

Mit vollständiger Induktion beweist man $a_{2k+1} = \frac{1}{k!}$ $(k \geq 1)$ und somit erhalten wir

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k \ (k \geq 0) \\ \frac{1}{k!}, & \text{für } n = 2k+1 \ (k \geq 0) \end{cases}.$$

Insgesamt lautet die Lösung also

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{2k+1} = xe^{x^2}.$$

Aufgabe 15:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe des abgewandelten Potenzreihenansatzes

(i) $2xy'' + 3y' + 2y = 0 \quad (x > 0)$,

(ii) $xy'' + 7y' + \frac{9y}{x} = 0 \quad (x > 0)$,

(iii) $x^2y'' - xy' + \frac{3-4x^2}{4}y = 0 \quad (x > 0)$.

Lösung:

(i) Wir verwenden den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho}$ und erhalten

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho) a_n x^{n+\rho-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho)(n+\rho-1) a_n x^{n+\rho-2}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$0 \overset{!}{=} 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_n x^{n+\rho-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n x^{n+\rho-1} + \underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho}}_{=\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+\rho-1}}$$
$$= \rho(2\rho+1)a_0 x^{\rho-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+\rho)(2(n+\rho)+1)a_n + 2a_{n-1}\right]x^{n+\rho-1}.$$

Dies liefert die determinierenden Gleichung für ρ:

$$\rho(2\rho+1) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir mit dem verwendeten Ansatz zwei linear unabhängige Lösungen für beliebiges $a_0 \neq 0$:

- *Fall* $\rho = 0$: Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$n(2n+1)a_n + 2a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{-4a_{n-1}}{(2n+1)2n} \quad (n \geq 1).$$

Durch vollständige Induktion zeigt man $a_n = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$ (mit $a_0 = 1$), also

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^{n+0} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2\sqrt{x})^{2n+1} = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

- *Fall* $\rho = -\frac{1}{2}$: Hier erhalten wir wieder durch Koeffizientenvergleich

$$(n - \tfrac{1}{2})2na_n + 2a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{-4a_{n-1}}{(2n-1)2n} \quad (n \geq 1).$$

Analog zum ersten Fall ergibt sich

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2\sqrt{x})^{2n} = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = 2Ay_1(x) + By_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(A\sin(2\sqrt{x}) + B\cos(2\sqrt{x})\right) \quad (A, B \in \mathbb{R},\ x > 0).$$

(ii) Wir verwenden den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho}$ und erhalten

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n x^{n+\rho-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_n x^{n+\rho-2}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_n x^{n+\rho-1} + 7\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n x^{n+\rho-1} + 9\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\rho)(n+\rho+6)+9\right]a_n x^{n+\rho-1}. \end{aligned}$$

Die determinierende Gleichung für ρ lautet also $\rho(\rho+6)+9 = 0$, d.h. $(\rho+3)^2 = 0$ und somit $\rho = -3$. Koeffizientenvergleich liefert schließlich

$$[(n-3)(n+3)+9]a_n = 0 \Leftrightarrow n^2 a_n = 0 \quad (n \geq 1),$$

also

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-3} = \frac{1}{x^3} \quad (x > 0).$$

Um die allgemeine Lösung zu finden, benutzen wir den Ansatz $y(x) = y_1(x)u(x)$. Wir erhalten durch Einsetzen in die DGL

$$\frac{u''}{x^2} + \frac{u'}{x^3} = 0.$$

Lösen dieser DGL liefert $u'(x) = \frac{A}{x}$ für $A \in \mathbb{R}$ und somit $u(x) = A\log x + B$ $(A, B \in \mathbb{R})$. Damit lautet die allgemeine Lösung also

$$y(x) = y_1(x)u(x) = \frac{A\log x + B}{x^3} \quad (A, B \in \mathbb{R},\ x > 0).$$

(iii) Wir verwenden wieder den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho}$ und erhalten

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n x^{n+\rho-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_n x^{n+\rho-2}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_n x^{n+\rho} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n x^{n+\rho} + \tfrac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho+2} \\ &= \left[\rho(\rho-1) - \rho + \tfrac{3}{4}\right]a_0 x^{\rho} + \left[(1+\rho)\rho - (1+\rho) + \tfrac{3}{4}\right]a_1 x^{1+\rho} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[((n+\rho)(n+\rho-2) + \tfrac{3}{4})a_n - a_{n-2}\right]x^{n+\rho}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die determinierende Gleichung

$$0 = \rho(\rho-1) - \rho + \tfrac{3}{4} = (\rho - \tfrac{1}{2})(\rho - \tfrac{3}{2})$$

und durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &((1+\rho)\rho - (1+\rho) + \tfrac{3}{4})a_1 = 0, \\ &((n+\rho)(n+\rho-2) + \tfrac{3}{4})a_n - a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die beiden Falle:

- *Fall* $\rho = \frac{3}{2}$: Hier gilt $2a_1 = 0$ und $a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n+1)}$ $(n \geq 2)$. Das heißt $a_n = 0$ für n ungerade und für $n = 2k$ gerade $a_n = \frac{1}{(2k+1)!}$ $(k \geq 0)$. Wir erhalten also

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{3}{2}} = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{x} \sinh x$$

- *Fall* $\rho = \frac{1}{2}$: Hier gilt $0a_1 = 0$ (wir wählen $a_1 = 0$) und $a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$ $(n \geq 2)$. Das heißt $a_n = 0$ für n ungerade und für $n = 2k$ gerade $a_n = \frac{1}{(2k)!}$ $(k \geq 0)$. Wir erhalten also

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k+\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{x} \cosh x$$

Die allgemeine Lösung lautet schließlich

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = \sqrt{x}(A \sinh x + B \cosh x) \quad (A, B \in \mathbb{R}, x > 0).$$