Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2016/17

16.12.2016

Übungsblatt 5

Aufgabe 16:
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass die folgenden Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind und berechnen Sie eine Formel für die Funktionenfolge (y_n) der Picard-Iteration. Geben Sie außerdem den punktweisen Limes der Folge (y_n) an und zeigen Sie, dass die Grenzfunktion Lösung des Anfangswertproblems ist.

(i) $y' = -y, \quad y(0) = -1,$

(ii) $y' = (1+y)\cos x, \quad y(0) = 1,$

(iii) $y' = 2xy + 2x^3, \quad y(0) = 0.$

Aufgabe 17:
Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x,y) = \begin{cases} 2\left(x - \frac{y}{\sqrt{|y|}}\right), & y \neq 0 \\ 2x, & y = 0 \end{cases}.$$

Betrachten Sie weiter das Anfangswertproblem

$$y' = g(x,y), \quad y(0) = 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass g stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (y_n) der Picard-Iteration nicht konvergiert.

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = ax^2$ mit $a > 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf $[0, \infty)$.

(iv) Gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 18:
Betrachten Sie die Abbildung $T\colon \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ gegeben durch

$$(Tf)(x) := x \int_0^x tf(t)\ dt + 1 \quad (f \in \mathrm{C}([0,1]),\ x \in [0,1]).$$

Zeigen Sie, dass T wohldefinert ist. Verwenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz um zu zeigen, dass T genau einen Fixpunkt $f_* \in \mathrm{C}([0,1])$ besitzt.

Hinweis: Aus HM2 ist bekannt, dass $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 19:
Sei $g \in \mathrm{C}([0,1])$ beliebig. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass die Integralgleichung

$$f(x) = g(x) + \int_0^x f(x-t)e^{-t^2} dt$$

genau eine Lösung $f_* \in \mathrm{C}([0,1])$ besitzt.

Hinweis: Aus HM2 ist bekannt, dass $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Wir wünschen Ihnen erholsame Weihnachtsfeiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2017!

Die Aufgaben werden in der Übung am 12.01.2017 besprochen.