Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

# Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
## Wintersemester 2016/17

12.01.2017

## Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 5

**Aufgabe 16:**
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass die folgenden Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind und berechnen Sie eine Formel für die Funktionenfolge $(y_n)$ der Picard-Iteration. Geben Sie außerdem den punktweisen Limes der Folge $(y_n)$ an und zeigen Sie, dass die Grenzfunktion Lösung des Anfangswertproblems ist.

(i) $y' = -y, \quad y(0) = -1,$

(ii) $y' = (1+y)\cos x, \quad y(0) = 1,$

(iii) $y' = 2xy + 2x^3, \quad y(0) = 0.$

**Lösung:**

(i) Wir definieren $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $F(x,y) := -y$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $F$ offensichtlich stetig und auch stetig partiell differenzierbar bezüglich $y$: $F_y(x,y) = -1$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat das Anfangswertproblem

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(0) = -1$$

also genau eine maximale Lösung.

Die Picard-Iteration ist hier gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -1 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t)\, dt \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Damit gilt schließlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -1 + \int_0^1 1\, dt = -1 + x, \\ y_2(x) &= -1 - \int_0^x (-1+t) dt = -1 + x - \frac{1}{2}x^2, \\ y_3(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3, \\ y_4(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4. \end{aligned}$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Wir beweisen dies mit Hilfe vollständiger Induktion:

- *IA:* $(n = 0)$

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k = -1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- *IS:* Die Behauptung gelte bereits für ein $n \in \mathbb{N}_0$:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{IV}$$

  Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t)\ dt \overset{(IV)}{=} -1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^x t^k dt \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)} x^{k+1} = -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k. \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iteration punktweise gegen

$$y(x) := \lim_{n \to \infty} y_n(x) = -\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = -e^{-x}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt, dass dieses $y$ die maximale Lösung (auf ganz $\mathbb{R}$) des Anfangswertproblems ist.

(ii) Hier ist $F(x, y) = (1 + y)\cos x$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, also stetig und stetig differenzierbar bezüglich $y$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist also das gegebene Anfangswertproblem eindeutig lösbar.

Die ersten Schritte der Picard-Iteration lauten für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x 2\cos t\ dt = 1 + 2\sin x, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x (2 + 2\sin t)\cos t\ dt = 1 + 2\sin x + \sin^2 x, \\ y_3(x) &= 1 + 2\sin x + \sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x, \\ y_4(x) &= 1 + 2\sin x + \sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{3 \cdot 4}\sin^4 x, \\ y_5(x) &= 2\left(1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2 \cdot 3}\sin^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\sin^4 x + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\sin^5 x\right) - 1. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man die Formel

$$y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k x}{k!} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- *IA:* $(n = 0)$
$$y_0(x) = 2\sum_{k=0}^{0} \frac{\sin^k x}{k!} - 1 = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- *IS:* Die Behauptung gelte bereits für ein $n \in \mathbb{N}_0$:
$$y_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k x}{k!} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{IV}$$

  Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x (1 + y_n(t)) \cos t \; dt \\ &\overset{(IV)}{=} 1 + \sin x + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^x \sin^k t \cos t \; dt - \int_0^x \cos t \; dt \\ &= 1 + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(k+1)} \sin^{k+1} t \Big|_{t=0}^{x} \\ &= 1 + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \sin^{k+1} x \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \sin^k x \\ &= 2\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\sin^k x}{k!} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iteration punktweise gegen
$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\sin^k x}{k!} - 1 = 2e^{\sin x} - 1.$$

Einsetzen in die DGL bestätigt
$$y'(x) = 2\cos x e^{\sin x} = (1 + e^{\sin x} - 1)\cos x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Also ist $y$ auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

(iii) In dieser Aufgabe ist $F(x, y) = 2xy + 2x^3$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, also sowohl stetig, als auch stetig partiell differenzierbar bezüglich $y$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist das gegebene Anfangswertproblem also eindeutig lösbar.

Für die Picard-Iteration gilt für $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x 2t^3 dt = \frac{1}{2}x^4, \\ y_2(x) &= \int_0^x (x^5 + 2x^3) dt = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6, \\ y_3(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8, \\ y_4(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \frac{1}{5!}x^{10}. \end{aligned}$$

Dies motivert die Behauptung

$$y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^{2k}}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

welche wir mit vollständiger Induktion beweisen wollen:

- *IA:* $(n = 0)$

$$y_0(x) = \sum_{k=2}^{1} \frac{x^{2k}}{k!} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- *IS:* Die Behauptung gelte bereits für ein $n \in \mathbb{N}_0$:

$$y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^{2k}}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{IV}$$

  Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \int_0^x (2ty_n(t)) + 2t^3)dt \overset{(IV)}{=} \frac{1}{2}x^4 + 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \int_0^x t^{2k+1}dt \\ &= \frac{1}{2}x^4 + 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!(2k+2)} x^{2k+2} = \frac{1}{2}x^4 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k+1)!} x^{2(k+1)} \\ &= \frac{1}{2}x^4 + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k!} x^{2k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iteration punktweise gegen

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^{2k}}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{k!} - x^2 - 1 = e^{x^2} - x^2 - 1.$$

Einsetzen in die DGL bestätigt

$$y'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - x^2 - 1) + 2x^3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Also ist $y$ auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

**Aufgabe 17:**
Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x, y) = \begin{cases} 2\left(x - \frac{y}{\sqrt{|y|}}\right), & y \neq 0 \\ 2x, & y = 0 \end{cases}.$$

Betrachten Sie weiter das Anfangswertproblem

$$y' = g(x, y), \quad y(0) = 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass $g$ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(y_n)$ der Picard-Iteration nicht konvergiert.

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = ax^2$ mit $a > 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf $[0, \infty)$.

(iv) Gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?

**Lösung:**

(i) Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $g$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Für die Stetigkeit auf ganz $\mathbb{R}^2$ sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig gewählt. Dann gilt

$$\left| 2\left(x - \frac{y}{\sqrt{|y|}}\right) - 2x_0 \right| \leq 2\,|x - x_0| + \sqrt{|y|} \to 0 \quad ((x, y) \to (x_0, 0)).$$

Zusatz: Nach dem Satz von Peano ist das gegebene Anfangswertproblem lösbar.

(ii) Für die Picard-Iteration gilt:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x 2t\ dt = x^2, \\ y_2(x) &= 0, \end{aligned}$$

wobei für die letzte Zeile verwendet wurde, dass für $t > 0$ gilt: $g(t, t^2) = 2(t - \frac{t^2}{\sqrt{t^2}}) = 0$. Damit konvergiert die Folge $(y_n)$ nicht.

Beachte: Weder $y(x) = 0$ noch $y(x) = x^2$ lösen das AWP.

(iii) Wir setzen den Ansatz $y(x) = ax^2$ in $g$ ein und erhalten

$$g(x, y(x)) = g(x, ax^2) = 2(1 - \sqrt{a})x \quad (x \geq 0).$$

Wegen $y'(x) = 2ax$ ist $y(x) = ax^2$ eine Lösung, falls $1 - \sqrt{a} = a$ gilt. Wir substituieren $b = \sqrt{a}$ und erhalten $b^2 + b - 1 = 0$ und damit $a = b_+^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. (Beachte: „$-$“ ist wegen $a > 0$ ausgeschlossen.) Damit erhalten wir die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})x^2.$$

(iv) Wir verwenden wieder den gegebenen Ansatz und erhalten

$$g(x, y(x)) = g(x, ax^2) = 2(1 + \sqrt{a})x \quad (x < 0).$$

Analog erhalten wir eine Lösung, falls $a = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ gilt. Insgesamt erhalten wir also die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})x^2, & x < 0 \end{cases}.$$

Diese Lösung ist auch in $x = 0$ stetig differenzierbar.

**Aufgabe 18:**

Betrachten Sie die Abbildung $T\colon \mathrm{C}([0, 1]) \to \mathrm{C}([0, 1])$ gegeben durch

$$(Tf)(x) := x \int_0^x t f(t)\ dt + 1 \quad (f \in \mathrm{C}([0, 1]),\ x \in [0, 1]).$$

Zeigen Sie, dass $T$ wohldefinert ist. Verwenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz um zu zeigen, dass $T$ genau einen Fixpunkt $f_* \in \mathrm{C}([0,1])$ besitzt.

*Hinweis:* Aus HM2 ist bekannt, dass $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

**Lösung:**
Für jedes $f \in \mathrm{C}([0,1])$ ist $Tf$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit

$$(Tf)'(x) = \int_0^x tf(t)\ dt + x^2 f(x) \quad (x \in [0,1])$$

und damit insbesondere stetig. Weiter gilt für $f, g \in \mathrm{C}([0,1])$ und $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}|(Tf)(x) + (Tg)(x)| &= \left| x \int_0^x tf(t)\ dt - x \int_0^x tg(t)\ dt \right| \\ &\leq \underbrace{|x|}_{\leq 1} \int_0^x t\,|f(t) - g(t)|\ dt \\ &\leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 t\ dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{=:\alpha<1} \|f - g\|_\infty .\end{aligned}$$

Damit gilt auch $\|Tf - Tg\|_\infty \leq \alpha \|f - g\|_\infty$, also ist $T$ eine Kontraktion. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz existiert also ein eindeutiger Fixpunkt $f_* \in \mathrm{C}([0,1])$.

**Aufgabe 19:**
Sei $g \in \mathrm{C}([0,1])$ beliebig. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass die Integralgleichung

$$f(x) = g(x) + \int_0^x f(x-t)e^{-t^2} dt$$

genau eine Lösung $f_* \in \mathrm{C}([0,1])$ besitzt.

*Hinweis:* Aus HM2 ist bekannt, dass $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

**Lösung:**
Wir zeigen, dass $x \mapsto g(x) + \int_0^x f(x-t)e^{-t^2} dt$ stetig ist und definieren dann den Fixpunktoperator $T\colon \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ durch

$$(Tf)(x) := g(x) + \int_0^x f(x-t)e^{-t^2} dt \quad (f \in \mathrm{C}([0,1]),\ x \in [0,1]).$$

Um die besagte Stetigkeit zu zeigen, sei $f \in \mathrm{C}([0,1])$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wegen der Kompaktheit von $[0,1]$ ist $f$ beschränkt, d.h. $|f(x)| < M$ $(x \in [0,1])$, und gleichmäßig stetig (siehe HM1). Daher existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Damit erhalten wir für jedes $x \in [0,1]$ und für alle $|h| \leq \delta$ mit $x + h \in [0,1]$

$$\begin{aligned}&\left| \int_0^{x+h} f(x+h-t)e^{-t^2} dt - \int_0^x f(x-t)e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_x^{x+h} \underbrace{|f(x+h-t)|}_{\leq M} \underbrace{e^{-t^2}}_{\leq 1} dt + \int_0^x \underbrace{|f(x+h-t) - f(x-t)|}_{\leq \varepsilon} e^{-t^2} dt \\ &\leq |h|\, M + \varepsilon\, |x| \leq |h|\, M + \varepsilon.\end{aligned}$$

Also gilt für jedes $x \in [0,1]$

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{x+h} f(x+h-t)e^{-t^2}\,dt = \int_0^x f(x-t)e^{-t^2}\,dt$$

und damit ist $x \mapsto \int_0^x f(x-t)e^{-t^2}\,dt$ stetig. Wegen der Stetigkeit von $g$ folgt die behauptete Stetigkeit und der obige Fixpunktoperator ist wohldefinert.

Um den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden zu können, zeigen wir noch, dass $T$ eine Kontraktion auf $\mathrm{C}([0,1])$ ist. Seien dazu $f, \hat{f} \in \mathrm{C}([0,1])$ und $x \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left|(Tf)(x) - (T\hat{f})(x)\right| &= \left|\int_0^x (f(x-t) - \hat{f}(x-t))e^{-t^2}\,dt\right| \\
&\le \int_0^x \left|f(x-t) - \hat{f}(x-t)\right| e^{-t^2}\,dt \\
&\le \|f-\hat{f}\|_\infty \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \\
&\le \|f-\hat{f}\|_\infty \left( \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{e^{-t^2}}_{\le 1}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{e^{-t^2}}_{\le e^{-\frac{1}{4}}}\,dt \right) \\
&\le \|f-\hat{f}\|_\infty \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{2}}^{<\frac{1}{2}} \right)}_{=:\alpha<1} \le \alpha \|f-\hat{f}\|_\infty
\end{aligned}$$

Also gilt auch $\|Tf - T\hat{f}\|_\infty \le \alpha\|f-\hat{f}\|_\infty$. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz existiert also ein genau ein Fixpunkt $f_* \in \mathrm{C}([0,1])$.