Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2016/17

26.01.2017

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 6

Aufgabe 20:
Seien $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Betrachten Sie das lineare, inhomogene System mit variablen Koeffizienten

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x) \quad (x \in I).$$

Weiter seien $y_1, \dots, y_n\colon I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante $w\colon I \to \mathbb{R}$ von $y_1, \dots, y_n$ die folgende Differentialgleichung löst:

$$w'(x) = \operatorname{Spur}(A(x))w(x) \quad (x \in I).$$

Hinweis: Determinantenentwicklungssatz

Lösung:
Nach dem Determinantenentwicklungssatz gilt für jede Matrix $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und jedes $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} b_{ik} \det(\hat{B}^{(ik)}),$$

wobei die Matrix $\hat{B}^{(ik)}$ aus der Matrix B durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. Damit ist die Abbildung $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial \det}{\partial b_{ij}}(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \underbrace{\frac{\partial b_{ik}}{\partial b_{ij}}}_{\delta_{kj}} \det(\hat{B}^{(ik)}) = (-1)^{i+j} \det(\hat{B}^{(ij)}) \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

Weiter bezeichne $Y(x) = (Y_{ij}(x)) = (y_1(x) \ \cdots \ y_n(x))$ $(x \in I)$ die Matrix mit Spalten $y_1, \dots, y_n$. Für Y gilt also $Y' = AY$, bzw.

$$Y'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) Y_{kj}(x) \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}, \ x \in I)$$

Damit erhalten wir unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} w'(x) = (\det(Y))'(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det}{\partial b_{ij}}(Y(x)) Y'_{ij}(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(\hat{Y}^{(ij)}(x)) \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) Y_{kj}(x) \qquad (*) \\ &= \sum_{i,kj=1}^{n} a_{ik}(x) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(\hat{Y}^{(ij)}(x)) Y_{kj}(x) \end{aligned}$$

Weiter gilt für $i,k \in \{1,\dots,n\}$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(\hat{Y}^{(ij)}(x)) Y_{kj}(x) = \delta_{ik} \det(Y(x)) \quad (x \in I).$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt schließlich

$$w'(x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\delta_{ik} w(x) = w(x) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Spur}(A(x)) w(x) \quad (x \in I).$$

Aufgabe 21:
Bestimmen Sie Fundamentalsysteme der folgenden Systeme von Differentialgleichungen

(i)
$$y' = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot y,$$

(ii)
$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot y,$$

(iii)
$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot y.$$

Lösung:

(i) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(6-\lambda) + 24 = \lambda(\lambda - 2) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Die Eigenwerte der Matrix lauten also 0 und 2. Wir berechnen die zugehörigen Eigenräume und erhalten

$$E_0 = \operatorname{Kern}(A - 0E) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{bzw.} \quad E_2 = \operatorname{Kern}(A - 2E) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit erhalten wir die Fundamentallösungen

$$y_1(x) = e^{0x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir berechnen wieder das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(6-\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Als nächstes bestimmen wir wieder die zugehörigen Eigenräume

$$E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{bzw.} \quad E_6 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir erhalten also die Fundamentallösungen

$$y_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_2(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$y_3(x) = e^{6x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)^3$. Wir berechnen den Eigenraum

$$E_0 = \operatorname{Kern}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ist

$$y_1(x) = e^{0x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Fundamentallösung. Wir berechnen weiter $E_{-1} = \operatorname{Kern}(A + E) = (1, 0, -1, 0)^T$ und erhalten somit

$$y_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen diesen Eigenvektor zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A + E)^2$ und erhalten

$$\operatorname{Kern}(A + E)^2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dies liefert die dritte Fundamentallösung

$$y_3(x) = e^{-x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x(A + E) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + xe^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erneutes Ergänzen zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A+E)^3$ ergibt

$$\begin{aligned} y_4(x) &= e^{-x}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x(A+E)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}(A+I)^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}) \\ &= e^{-x}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + xe^{-x}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}e^{-x}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insgesamt bilden also $y_1, \ldots, y_4$ ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 22:
Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} u' &= 3u + v - w \\ v' &= u + 3v - w \\ w' &= 3u + 3v - w \end{aligned}$$

Lösung:
Mit $y = (u, v, w)^T$ ist das gegebene System äquivalent zu

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\1 & 3 & -1\\3 & 3 & -1\end{pmatrix}}_{=:A} \cdot y.$$

Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Wir berechnen die die zugehörigen Eigenräume

$$E_1 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

und erhalten somit das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 mit

$$y_1(x) = \begin{pmatrix}e^x\\e^x\\3e^x\end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix}0\\e^{2x}\\e^{2x}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_3(x) = \begin{pmatrix}e^{2x}\\0\\3e^{2x}\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 23:
Berechnen Sie jeweils die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(i)

$$y' = \underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -7 & -4\\-7 & 5 & -4\\5 & 5 & 2\end{pmatrix}}_{=:A} \cdot y, \quad y(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

(ii)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} \cdot y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(i) Wir berechnen zunächst ein zugehöriges Fundamentalsystem. Für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$p(\lambda) = \frac{1}{6^3} \det \begin{pmatrix} 5-6\lambda & -7 & -4 \\ -7 & 5-6\lambda & -4 \\ 5 & 5 & 2-6\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1+\lambda^2) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

A hat also die Eigenwerte 2, i und $-i$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{bzw.} \quad E_i = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -(1+3i) \end{pmatrix} \right\}$$

(Beachte: E_{-i} wird nicht benötigt). Daraus erhalten wir das zugehörige Fundamentalsystem $\{y_1, y_2, y_3\}$ bestehend aus

$$y_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_2(x) = \operatorname{Re}\left(e^{ix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -(1+3i) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\cos x \\ 2\cos x \\ 3\sin x - \cos x \end{pmatrix},$$

$$y_3(x) = \operatorname{Im}\left(e^{ix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -(1+3i) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin x \\ 2\sin x \\ -\sin x - 3\cos x \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Wir bestimmen also $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ entsprechend der Anfangswerte und erhalten $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ und $c_3 = -\frac{1}{3}$, also

$$y(x) = -\frac{1}{3} y_3(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sin x \\ -\frac{2}{3}\sin x \\ \frac{1}{3}\sin x + \cos x \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(ii) Wir berechnen wieder ein zugehöriges Fundamentalsystem. Für das charakteristische Polynom von B gilt:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5).$$

B hat also die Eigenwerte 1, $1+2i$ und $1-2i$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{bzw.} \qquad E_{1+2i} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Beachte: E_{1-2i} wird nicht benötigt). Daraus erhalten wir das zugehörige Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 bestehend aus

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ y_2(x) &= \operatorname{Re}(e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}) = \operatorname{Re}(e^x(\cos(2x) + i\sin(2x)) \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}, \\ y_3(x) &= \operatorname{Im}(e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Wir bestimmen also $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ entsprechend der Anfangswerte und erhalten $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ und $c_3 = 1$, also

$$y(x) = y_2(x) + y_3(x) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) + \cos(2x) \\ \cos(2x) + \sin(2x) \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$