Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2016/17

09.02.2017

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 7

Aufgabe 24:
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u_{tt}(x,t) - x^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad (x > 0,\ t \in \mathbb{R})$$

mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x,t) = v(x)e^{i\omega t}$ mit einem $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lösung:
Einsetzen des angegebenen Ansatzes liefert

$$-\omega^2 e^{i\omega t} v(x) - x^2 v''(x) e^{i\omega t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 v'' + \omega^2 v = 0.$$

Hierbei handelt es sich also um eine Euler'sche DGL für v. Die Substitution $x = e^s$, $z(s) = v(e^s)$ führt schließlich auf eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten für z:

$$z'' - z' + \omega^2 z = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser DGL lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \omega^2$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Wir berechnen die Nullstellen in Abhängigkeit von ω und machen dafür eine Fallunterscheidung:

- $|\omega| > \frac{1}{2}$: Hier erhalten wir die Nullstellen $\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}$. Damit lautet die allgemeine Lösung also

  $$z(s) = c_1 e^{\frac{s}{2}} \cos(\sqrt{4\omega^2 - 1}\tfrac{s}{2}) + c_2 e^{\frac{s}{2}} \sin(\sqrt{4\omega^2 - 1}\tfrac{s}{2}) \quad (s \in \mathbb{R})$$

  mit freien Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution liefert

  $$v(x) = c_1\sqrt{x}\cos(\sqrt{4\omega^2 - 1}\tfrac{\log x}{2}) + c_2\sqrt{x}\sin(\sqrt{4\omega^2 - 1}\tfrac{\log x}{2}) \quad (x > 0),$$

  bzw.

  $$u(x,t) = e^{i\omega t}\sqrt{x}\left(c_1\cos(\sqrt{4\omega^2 - 1}\log\sqrt{x}) + c_2\sin(\sqrt{4\omega^2 - 1}\log\sqrt{x})\right) \quad (x > 0,\ t \in \mathbb{R}).$$

- $|\omega| = \frac{1}{2}$: Hier erhalten wir die einfache Nullstelle $\lambda = \frac{1}{2}$ und somit die Lösung

  $$z(s) = c_1 e^{\frac{s}{2}} + c_2 s e^{\frac{s}{2}} \quad (s \in \mathbb{R})$$

  mit freien Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution liefert

  $$v(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\log(x)\sqrt{x} = \sqrt{x}(c_1 + c_2\log x) \quad (x > 0),$$

  bzw.

  $$u(x,t) = e^{i\omega t}\sqrt{x}(c_1 + c_2\log x) \quad (x > 0,\ t \in \mathbb{R}).$$

- $0 < |\omega| < \frac{1}{2}$: Hier erhalten wir die Nullstellen $\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \omega^2}$. Mit $\gamma := \sqrt{\frac{1}{4} - \omega^2} > 0$ lautet die allgemeine Lösung also

$$z(s) = c_1 e^{\frac{s}{2}} e^{\gamma s} + c_2 e^{\frac{s}{2}} e^{-\gamma s} \quad (s \in \mathbb{R})$$

mit freien Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution liefert

$$v(x) = c_1 \sqrt{x} x^\gamma + c_2 \sqrt{x} x^{-\gamma} \quad (x > 0),$$

bzw.

$$u(x,t) = e^{i\omega t} \sqrt{x} \left(c_1 x^\gamma + c_2 x^{-\gamma} \right) \quad (x > 0,\ t \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 25:
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{gathered} u_t(x,t) + x u_x(x,t) = t u(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^2) \\ u(x,0) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{gathered}$$

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems mit Hilfe

(i) des Charakteristikverfahrens.

(ii) eines Separationsansatzes.

Lösung:

(i) Wir setzen

$$a((x,t),u) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b((x,t),u) = tu.$$

Weiter sei $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve und $w(s) := u(k(s))$. Damit lautet das charakteristische System ($s \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} k'(s) = a(k(s), w(s)), \\ w'(s) = b(k(s), w(s) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k_1'(s) = k_1(s), \\ k_2'(s) = 1, \\ w'(s) = k_2(s) w(s) \end{cases} .$$

Wegen den Anfangsbedingungen und wegen $w(0) = u(k_1(0), k_2(0))$ fordern wir $k_2(0) = 0$, $k_1(0) = \gamma \in \mathbb{R}$ und $w(0) = k_1(0)^2 = \gamma^2$. Damit erhalten wir

$$k_1(s) = \gamma e^s, \quad k_2(s) = s \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Das AWP für w lautet dann $w' = sw$, $w(0) = \gamma^2$, also $w(s) = \gamma^2 e^{\frac{s^2}{2}}$ $(s \in \mathbb{R})$.

Nun lösen wir zu gegebenem $x > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $(x,t) = k(s;\gamma)$ nach (s,γ) auf. Es gilt

$$(x,t) = k(s;\gamma) = (\gamma e^s, s) \Leftrightarrow \gamma = x e^{-t} \ \wedge \ s = t.$$

Damit erhalten wir

$$u(x,t) = w(s;\gamma) = \gamma^2 e^{\frac{s^2}{2}} = x^2 e^{-2t + \frac{t^2}{2}} \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^2).$$

(ii) Wir verwenden den allgemeinen Separationsansatz $u(x,t) = v(x) g(t)$ $((x,t) \in \mathbb{R}^2)$. Damit erhalten wir

$$x \frac{v'(x)}{v(x)} = t - \frac{g'(t)}{g(t)} = \text{const} =: \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten also die beiden Differentialgleichungen

$$xv' = \lambda v \quad \text{und} \quad g' = (t - \lambda)g.$$

Lösen liefert $g(t) = c_1 e^{\frac{1}{2}t^2 - \lambda t}$ und $v(x) = c_2 x^\lambda$, also $u(x,t) = c_1 c_2 x^\lambda e^{\frac{1}{2}t^2-\lambda t}$. Einsetzen in die Anfangsbedingung ergibt $c_1 c_2 = 1$ und $\lambda = 2$, d.h.

$$u(x,t) = x^2 e^{\frac{1}{2}t^2 - 2t} \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^2)$$

Aufgabe 26:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + \left(\tfrac{\partial}{\partial x}(x^2 u)\right)(x,t) = 0 \qquad (x, t > 0),\\ u(x,0) = \sin x \quad (x > 0) \end{aligned}$$

mit dem Charakteristikverfahren.

Lösung:
Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$u_t(x,t) + x^2 u_x(x,t) = -2xu(x,t) \qquad (x, t > 0).$$

Wir definieren $a((x,t),u) := \binom{x^2}{1}$ und $b((x,t),u) := -2xu$ und erhalten die äquivalente DGL der Form

$$(u_x(x,t)\ u_t(x,t)) \cdot a((x,t), u(x,t)) = b((x,t), u(x,t)).$$

Für eine Kurve $k\colon I \to \mathbb{R}^2$ und $w := u \circ k$ erhalten wir das charakteristische System

$$\begin{cases} k_1'(s) = a_1(k(s), w(s)) = k_1(s)^2, \\ k_2'(s) = a_2(k(s), w(s)) = 1 \qquad\qquad (s \in I), \\ w'(s) = b(k(s), w(s)) = -2k_1(s)w(s). \end{cases}$$

Wegen der Anfangsbedingung $u(x,0) = \sin x$ $(x > 0)$ erhalten wir die folgenden Anfangsbedingungen für das charakteristische System:

$$k_1(0) = \gamma \in \mathbb{R}, \quad k_2(0) = 0, \quad w(0) = u(k(0)) = u(\gamma, 0) = \sin\gamma.$$

Damit erhalten wir zum einen $k_2(s) = s$ und $k_1(s) = \frac{\gamma}{1-s\gamma}$ $(s \in I := [0, \frac{1}{\gamma}))$. Wir fordern zusätzlich $\gamma > 0$. Einsetzen in die DGL für w ergibt

$$w(s) = c\exp(2\int \frac{-\gamma}{1-s\gamma} ds) = c(1-s\gamma)^2 \quad (s \in I).$$

Mit der Anfangsbedingung $w(0) = \sin\gamma$ erhalten wir $w(s) = \sin\gamma(1-s\gamma)^2$ $(s \in I)$.

Zu $x, t > 0$ versuchen wir nun die Gleichung $(x,t) = k(s;\gamma)$ nach

$$(\gamma, s) \in \left\{(\delta, z) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < \delta,\ 0 \le z < \frac{1}{\delta}\right\}$$

aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned} k(s;\gamma) = (x,t) \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\gamma}{1-s\gamma} = \frac{1}{\frac{1}{\gamma} - s} \ \wedge\ t = s \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{\gamma} - t \ \wedge\ t = s \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\frac{1}{x} + t} = \frac{x}{1+tx} \ \wedge\ t = s \end{aligned}$$

und wir erhalten die Lösung

$$u(x,t) = w(s;\gamma) = \sin\left(\frac{x}{1+tx}\right)\frac{1}{(1+tx)^2} \quad (x,t>0).$$

Aufgabe 27:

(i) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 2u_t(x,t) + 3u_x(x,t) &= \sin(2x-3t) \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^2),\\ u(x,0) &= xe^x \quad (x\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_x(x,t) - u_t(x,t) &= xe^t \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^2),\\ u(x,0) &= x+1 \quad (x\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Lösung:

(i) Dividieren der Differentialgleichung durch 2 ergibt das lineare Transportproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + \underbrace{\frac{3}{2}}_{=:a} u_x(x,t) &= \underbrace{\frac{1}{2}\sin(2x-3t)}_{=:g(x,t)} \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^2),\\ u(x,0) &= \underbrace{xe^x}_{=:f(x)} \quad (x\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-at) + \int_0^t g(x-a(t-s),s)\;ds\\ &= \left(x-\frac{3}{2}t\right)e^{x-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(\underbrace{2\left(x-\frac{3}{2}(t-s)\right)-3s}_{=2x-3t})\;ds\\ &= \left(x-\frac{3}{2}t\right)e^{x-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2}t\sin(2x-3t) \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

(ii) Es handelt sich um eine lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$u_t(x,t) + \underbrace{(-1)}_{=:a} u_x(x,t) = \underbrace{-xe^t}_{=:g(x,t)} \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^2).$$

Außerdem setzen wir $f(x) := x+1$ $(x\in\mathbb{R})$. Nach der Lösungsformel für die lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-at) + \int_0^t g(x-a(t-s),s)\;ds\\ &= x+t+1 - \int_0^t (x+(t-s))e^s ds\\ &= x+t+1-(x+t)e^s\Big|_{s=0}^t + \underbrace{\int_0^t se^s ds}_{=se^s\big|_{s=0}^t - \int_0^t e^s ds}\\ &= 2(x+t)+1-(x+t)e^t+te^t-(e^t-1)\\ &= 2(x+t+1)-(x+1)e^t \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Aufgabe 28:
Bestimmen Sie für $n \geq 2$ alle radialsymmetrischen Lösungen der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

d.h. alle Lösungen der Form $u(x) = g(\|x\|)$ $(x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Lösung:
Wir suchen radialsymmetrischen Lösungen der Form $u(x) = g(\|x\|)$ $(x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, wobei $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= g'(\|x\|) \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n {x_j}^2}} = g'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|}, \\ u_{x_i x_i}(x) &= g''(\|x\|) \frac{{x_i}^2}{\|x\|^2} + g'(\|x\|) \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{{x_i}^2}{\|x\|^3} \right). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) = g''(\|x\|) + g'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|} \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Also löst ein solches u genau dann die gegebenen Poisson-Gleichung, wenn g der folgenden gewöhnlichen DGL genügt $(r := \|x\| > 0)$:

$$g''(r) + g'(r) \frac{n-1}{r} = -1 \quad \overset{h := g'}{\Leftrightarrow} \quad h'(r) + h(r) \frac{n-1}{r} = -1 \quad (r > 0).$$

Lösen dieser DGL ergibt $h_h(r) = c_1 r^{1-n}$ $(r > 0)$ mit der freien Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$ und Variation der Konstanten liefert $h_p(r) = -\frac{r}{n}$ $(r > 0)$. Insgesamt haben wir also die Lösung

$$h(r) = c_1 r^{1-n} - \frac{r}{n} \quad \text{bzw.} \quad g(r) = \begin{cases} c_1 \log r - \frac{r^2}{4} + c_2, \text{für } n = 2 \\ \frac{c_1}{2-n} r^{2-n} - \frac{r^2}{4} + c_2, \text{für } n > 2 \end{cases} \quad (r > 0).$$

Durch Rücksubstitution mit $r = \|x\|$ erhält man die gesuchten radialsymmetrischen Lösungen.