Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
20.10.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Die Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Man löst formal

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -Cy^2 \\ \rightsquigarrow \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y &= -C\mathrm{d}x \\ \rightsquigarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta &= -C\int_0^x \mathrm{d}\xi \\ \Leftrightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=y_0}^{y(x)} &= -Cx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y_0} &= Cx \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{1}{\frac{1}{y_0} + Cx}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich also die folgenden drei Fälle.

(i) $y_0 > 0$: Die Lösung ist eindeutig, solange $y^2 \neq 0$. Sie ist durch die obige Formel gegeben. Offenbar ist $y(x)^2 \neq 0$ für alle erlaubten x. Die Formel ergibt Sinn, solange der Nenner nicht verschwindet, also

$$\frac{1}{y_0} + Cx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{Cy_0} < 0.$$

Also ist die Lösung y zumindest auf dem Intervall $I = \left(-\frac{1}{Cy_0}, \infty\right)$ erklärt und dort eindeutig. Wegen

$$\lim_{x \to -\frac{1}{Cy_0}+} y(x) = \infty$$

ist sie nicht weiter nach links fortsetzbar.

(ii) $y_0 < 0$: Die Argumentation aus dem Fall $y_0 > 0$ kann fast wörtlich übernommen werden. Die Lösung ist wieder durch die obige Formel gegeben, „lebt“ auf dem Intervall $I = \left(-\infty, -\frac{1}{Cy_0}\right)$ und ist nicht weiter nach rechts fortsetzbar.

(iii) $y_0 = 0$: Klar $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung des AWPs.

Angenommen, es gäbe eine davon verschiedene Lösung $\tilde{y} : 0 \in \tilde{I} \to \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $x_0 \in \tilde{I}$ mit $\tilde{y}_0 := \tilde{y}(x_0) \neq 0$. Wie in vorhergehenden Fällen sieht man, dass

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{y}_0} + C(x - x_0)}$$

für alle $x \in \tilde{I}$ gilt. Also ist $\tilde{y}(0) \neq 0 = y_0$ und damit löst $\tilde{y}$ nicht das AWP — im Widerspruch zur Annahme.

(b) Schreibe die DGL in der Form

$$y' = \underbrace{\frac{4x}{1+x^2}}_{=:a(x)} y + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=:f(x)}.$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{A(x)} y(0) + e^{A(x)} \int_0^x e^{-A(s)} f(s) \mathrm{d}s, \qquad \text{wobei} \qquad A(x) = \int_0^x a(s) \mathrm{d}s,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Berechne

$$\begin{aligned}
A(x) &= \int_0^x \frac{4s}{1+s^2} = 2 \int_0^x \frac{2s}{1+s^2} = 2 \left[\ln(1+s^2)\right]_{s=0}^x = \ln\left((1+x^2)^2\right), \\
\int_0^x e^{-A(s)} f(s) \mathrm{d}s &= \int_0^x \frac{1}{(1+s^2)^2} \cdot \frac{s}{1+s^2} \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2s}{(1+s^2)^3} \mathrm{d}s = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(1+s^2)^2}\right]_{s=0}^x \\
&= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$y(x) = (1+x^2)^2 + (1+x^2)^2 \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{5}{4}(1+x^2)^2 - \frac{1}{4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2:

(a) Die Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Man löst formal

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x^2}{y^3} =: f(x) g(y) \\
\rightsquigarrow y^3 \mathrm{d}y &= -x^2 \mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_{\sqrt{2}}^{y(x)} \eta^3 \mathrm{d}\eta &= -\int_0^x \xi^2 \mathrm{d}\xi \\
\Leftrightarrow \frac{1}{4} \left[\eta^4\right]_{\eta=\sqrt{2}}^{y(x)} &= -\frac{1}{3} \left[\xi^3\right]_{\xi=0}^x \\
\Leftrightarrow y(x) &= \sqrt[4]{4 - \frac{4}{3} x^3}.
\end{aligned}$$

Die Formel ergibt einen Sinn, solange das Argument der Wurzel nicht-negativ ist. Dies ist genau für

$$4 - \frac{4}{3}x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{3}$$

der Fall. Da allerdings g nur für $y \neq 0$ definiert ist und $y(0) > 0$, lautet das Existenzintervall $I = \left(-\infty, \sqrt[3]{3}\right)$.

(b) Die Differentialgleichung ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{-\int_0^x \frac{C_1}{1-C_2\xi}\mathrm{d}\xi} \cdot y(0) + e^{-\int_0^x \frac{C_1}{1-C_2\xi}\mathrm{d}\xi} \int_0^x e^{\int_0^s \frac{C_1}{1-C_2\xi}\mathrm{d}\xi} \frac{C_3}{1-C_2 s}\mathrm{d}s$$

für alle $x \in \left(-\infty, \frac{1}{C_2}\right)$ gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{C_1}{1-C_2\xi}\mathrm{d}\xi &= -\frac{C_1}{C_2}\left[\ln(1-C_2\xi)\right]_{\xi=0}^x = -\frac{C_1}{C_2}\ln(1-C_2 x), \\
\int_0^x e^{-\frac{C_1}{C_2}\log(1-C_2 s)} \frac{C_3}{1-C_2 s}\mathrm{d}s &= C_3 \int_0^x (1-C_2 s)^{-\left(1+\frac{C_1}{C_2}\right)}\mathrm{d}s = \frac{C_3}{C_1}\left[(1-C_2 s)^{-\frac{C_1}{C_2}}\right]_{s=0}^x \\
&= \frac{C_3}{C_1}\left((1-C_2 x)^{-\frac{C_1}{C_2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\infty, \frac{1}{C_2}\right)$. Folglich ist

$$y(x) = \frac{C_3}{C_1}\left(1 - (1-C_2 x)^{\frac{C_1}{C_2}}\right)$$

für alle $x \in \left(-\infty, \frac{1}{C_2}\right)$.

Aufgabe 3:

(a) Nach der Grundgleichung der Mechanik gilt

$$F = ma,$$

wobei F die Summe aller auf das Teilchen wirkender Kräfte und $a = \dot{v}$ seine Beschleunigung ist. Die einzige wirkende Kraft ist F_f. Nach Division durch m liefert es die Differentialgleichung

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v^2$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Dies ist gerade das Anfangswertproblem aus Aufgabe 1 (a) mit $C = \frac{k}{m}$. Folglich ist die Geschwindigkeit des Teilchens durch

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{k}{m}t}$$

für alle $t \in [0, \infty)$ gegeben.

(b) Für die Masse m des Vehikels gilt nach der Aufgabenstellung

$$m(t) = m_0 + m_p - Dt$$

für alle $t \in [0, T]$. Die einzigen auf das Vehikel wirkenden Kräfte sind der Schub und der Luftwiderstand. Grundgleichung der Mechanik liefert

$$m(t)\dot{v} = S + F_f = S - kv.$$

Division durch m und einsetzen von $m(t)$ liefert die Differentialgleichung

$$\dot{v} = \frac{S}{m_0 + m_p - Dt} - \frac{k}{m_0 + m_p - Dt} = \frac{S}{m_0 + m_p} \frac{1}{1 - \frac{D}{m_0+m_p}t} - \frac{k}{m_0 + m_p} \frac{1}{1 - \frac{D}{m_0+m_p}t} v$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Dies ist gerade das Anfangswertproblem aus Aufgabe 2 (b) mit $C_1 = \frac{k}{m_0+m_p}$, $C_2 = \frac{D}{m_0+m_p}$ und $C_3 = \frac{S}{m_0+m_p}$. Folglich ist die Geschwindigkeit des Vehikels durch

$$v(t) = \frac{S}{k} \left(1 - (1 - \frac{D}{m_0 + m_p} t)^{\frac{k}{D}} \right)$$

für alle $-\infty < 0 \le t \le T = \frac{m_p}{D} < \frac{m_0+m_p}{D} = \frac{1}{C_2}$ gegeben. Also ist

$$v(T) = \frac{S}{k} \left(1 - (1 - \frac{m_p}{m_0 + m_p})^{\frac{k}{D}} \right).$$