Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Tobias Ried, M.Sc.

WS 2017/18
25.10.2017

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

02. Übungsblatt

Aufgabe 4:
Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $y' + y - \sqrt{y} = 0$ mit $y(0) = \frac{1}{4}$,

(b) $xy^2y' - x^2 + y^3 = 0$ mit $y(1) = -1$, sowie

(c) $y' = y^2 - (2x+1)y + 1 + x + x^2$ mit $y(0) = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 5:
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$(\tan(xy) + xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0 \text{ mit } y(1) = \frac{\pi}{6}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Finden Sie einen integrierenden Faktor $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf einer möglichst großen, einfach zusammenhängenden Menge $D \ni \left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, der nur von xy abhängt.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem in impliziter Form.

(d) Geben Sie die explizite Lösung des Anfangswertproblems auf einem möglichst großen Intervall $I \ni 1$ an.

Aufgabe 6:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Charakterisieren Sie die Spuren der regulären Raumkurven $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\big(\gamma'(t)|f(\gamma(t))\big) = 0 \qquad \forall t \in I$$

geometrisch.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 7:
Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $y' = x(y + y^2)$ mit $y(0) = 1$,

(b) $y' = -\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}$ mit $y(1) = 1$, sowie

(c) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$ mit $y(0) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 8:
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$(\sin(x) + \sinh(y))\mathrm{d}x + \cosh(y)\mathrm{d}y = 0 \text{ mit } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Finden Sie einen integrierenden Faktor $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf einer möglichst großen, einfach zusammenhängenden Menge $D \ni \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, der nur von x abhängt.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem in impliziter Form.

(d) Geben Sie die explizite Lösung des Anfangswertproblems auf einem möglichst großen Intervall $I \ni \frac{\pi}{4}$ an.

Aufgabe 9:
Ein Teilchen der Masse $m > 0$ falle im Gravitationsfeld der Erde. Der Luftwiderstand erzeuge eine Reibungskraft

$$F_f = -kv\,|v|\,,$$

wobei $k > 0$ eine Konstante und v die Geschwindigkeit des Teilchens bezeichne (vgl. Aufgabe 3(a)). Die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens sei v_0.

Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit des Teilchens auf und lösen Sie diese in Abhängigkeit von v_0.

Hinweis: Aufgaben 4, 5 und 6 werden voraussichtlich in der großen Saalübung besprochen. Die restlichen Aufgaben werden im Tutorium behandelt.